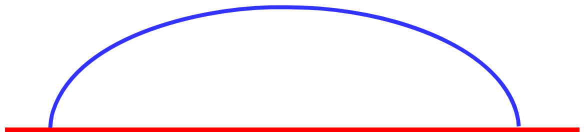
# VI. Brief Introduction for Acoustics

**[參考資料]**


- 王小川，"語音訊號處理"，全華出版，台北，民國94年。
- T. F. Quatieri, *Discrete-Time Speech Signal Processing: Principle and Practice*, Pearson Education Taiwan, Taipei, 2005.
- L. R. Rabiner and R. W. Schafer, *Digital Processing of Speech Signals*, Prentice-Hall, 1978.
- 張智星教授 網頁 http://neural.cs.nthu.edu.tw/jang/
- P. Filippi, *Acoustics : Basic Physics, Theory, and Methods*, Academic Press, San Diego, 1999.

# ⦿ 6-A 聲音的相關常識



人耳可以辨識頻率：20Hz ~ 20000Hz

說話：150~2000Hz

電話系統頻域：小於 3500Hz

電腦音效卡最高取樣頻率：44100Hz

(一般 22050Hz, 11025Hz)

> 20000Hz: 超音波 (ultrasound)

< 20Hz: 次聲波 (infrasound)

波長較長 -> 傳播距離較遠，但容易散射

波長較短 -> 衰減較快，但傳播方向較接近直線

- 一般聲音檔格式：

  (1) 取樣頻率 22050Hz

  (2) 單聲道或雙聲道

  (3) 每筆資料用8個bit來表示

- 電腦中沒有經過任何壓縮的聲音檔： *.wav

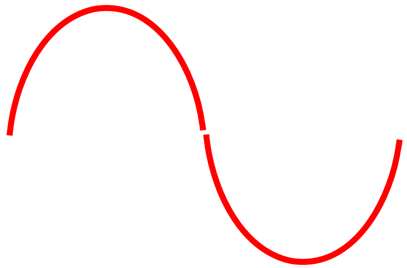
Q: What is the data size of a song without compression?

- 數位電話取樣頻率：8000Hz

聲音在空氣中傳播速度 ： 每秒 340 公尺 (15°C 時)

所以，人類對3000Hz 左右頻率的聲音最敏感

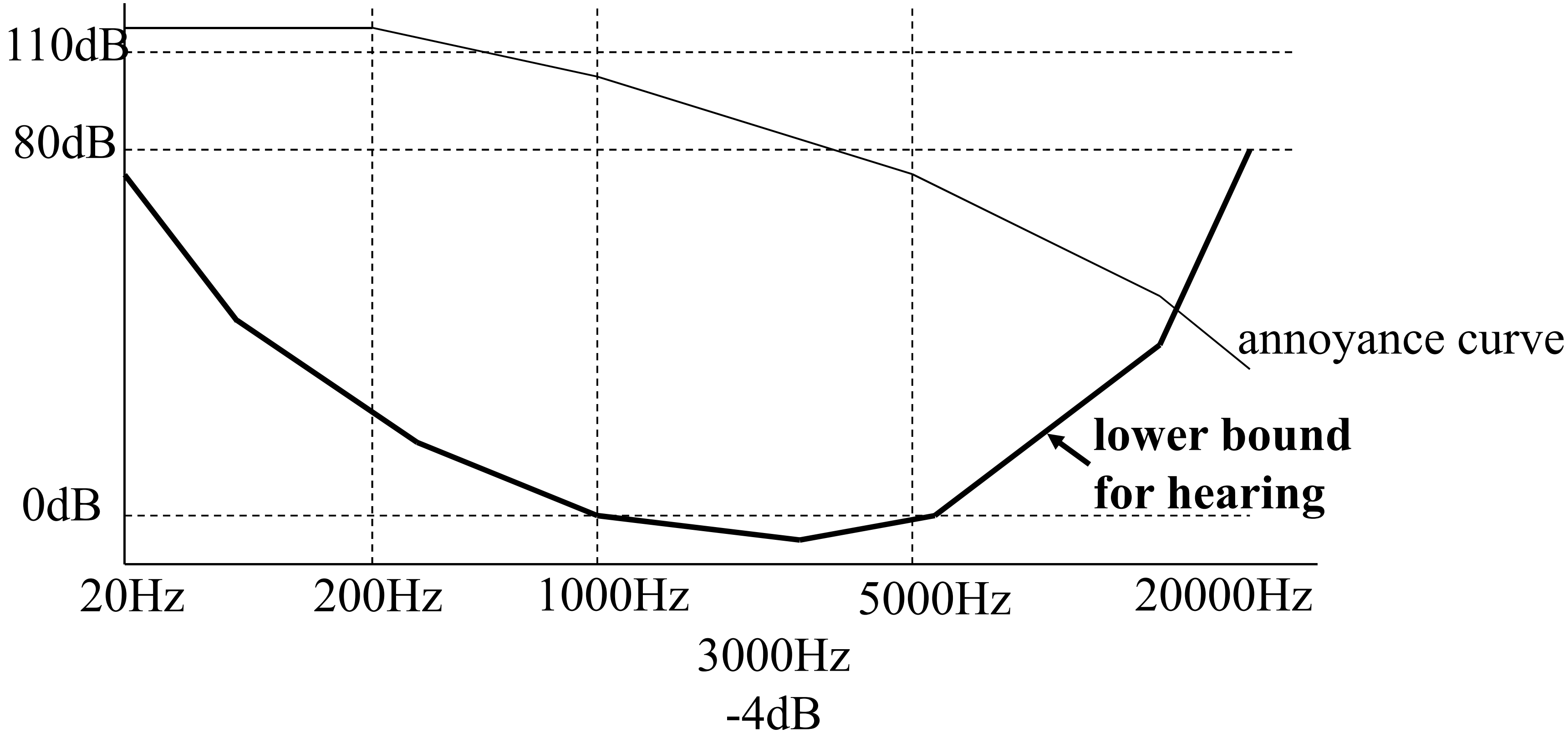
(一般人，耳翼到鼓膜之間的距離： 2.7公分)



附： (1) 每增加 1°C，聲音的速度增加 0.6 m/sec

(2) 聲音在水中的傳播速度是 1500 m/sec

在鋁棒中的傳播速度是 5000 m/sec


110dB
80dB
0dB
20Hz
200Hz
1000Hz
5000Hz
20000Hz
3000Hz
-4dB
annoyance curve
lower bound
for hearing

- dB: 分貝　$10\log_{10}(P/C)$， 其中P為音強(正比於振福的平方)；C為0dB時的音強

每增加 10dB，音強增加10倍；每增加3dB ，音強增加2倍；
所幸，內耳的振動不會正比於聲壓

- 人對於頻率的分辨能力，是由頻率的「比」決定

對人類而言，300Hz 和 400 Hz 之間的差別，與 3000Hz 和 4000 Hz 之間的差別是相同的

# ◉ 6-B Music Signal

電子琴 Do 的頻率：低音 Do: 131.32 Hz

中音 Do: 261.63 Hz

高音 Do: 523.26 Hz

更高音 Do: 1046.52 Hz, …….

音樂每增加八度音，頻率變為 2 倍

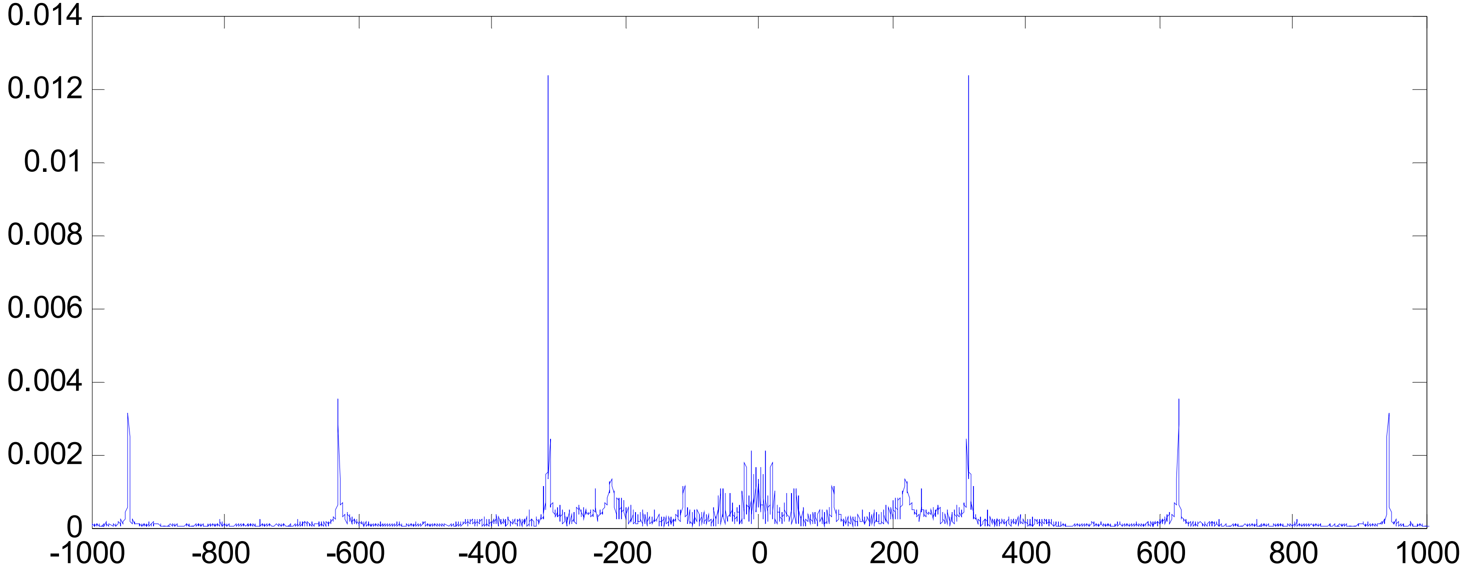
每一音階有12個半音

增加一個半音，頻率增加 $2^{1/12}$ 倍 (1.0595 倍)

| | Do | 升Do | Re | 升Re | Mi | Fa | 升Fa | So | 升So | La | 升La | Si |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Hz | 262 | 277 | 294 | 311 | 330 | 349 | 370 | 392 | 415 | 440 | 466 | 494 |

音樂通常會出現「和弦」(chord) 的現象

除了基頻 $f_0$ Hz 之外，也會出現 $2f_0$ Hz, $3f_0$ Hz, $4f_0$ Hz , ….. 的頻率




frequency (Hz)

## 為什麼會產生和弦？

因為聲音信號是一個 periodic signal，但是不一定是 sinusoid

A non-sinusoid signal with the period of 1/330 seconds can be expressed as:

## ◎ 6-C 語音處理的工作

(1) 語音編碼 (Speech Coding)
(2) 語音合成 (Speech Synthesis)
(3) 語音增強 (Speech Enhancement)

**前三項目前基本上已經很成功**

(4) 語音辨認 (Speech Recognition)

音素 → 音節 → 詞 → 句 → 整段話

(5) 說話人辨認 (Speaker Recognition)
(6) 其他：語意，語言，情緒

- 人耳可以辨識頻率：20Hz ~ 20000Hz

一般人，耳翼到鼓膜之間的距離： 2.7公分
共振：1/4波長

# ◉ 6-D 語音的辨認

音素 → 音節 → 詞 → 句 → 整段話

音素：相當於一個音標

(1) Spectrum Analysis

Time-Frequency Analysis

(2) Cepstrum

(3) Correlation for Words

## ◉ 6-E 子音和母音

ㄅ ㄆ ㄇ ㄈ ㄉ ㄊ ㄋ ㄌ ㄍ ㄎ ㄏ ㄐ ㄑ ㄒ ㄓ ㄔ ㄕ ㄖ ㄗ ㄘ ㄙ
ㄚ ㄛ ㄜ ㄝ ㄞ ㄟ ㄠ ㄡ ㄢ ㄣ ㄤ ㄥ ㄦ ㄧ ㄨ ㄩ

母音： ㄚ ㄛ ㄜ ㄝ ㄞ ㄟ ㄠ ㄡ ㄢ ㄣ ㄤ ㄥ ㄦ ㄧ ㄨ ㄩ

- 單母音： a, e, i, o, u ㄚ ㄛ ㄜ ㄝ ㄦ ㄧ ㄨ ㄩ
- 雙母音：ㄞ ㄟ ㄠ ㄡ
- 母音＋濁音：ㄢ ㄣ ㄤ ㄥ

子音： ㄅ ㄆ ㄇ ㄈ ㄉ ㄊ ㄋ ㄌ ㄍ ㄎ ㄏ ㄐ ㄑ ㄒ ㄓ ㄔ ㄕ ㄖ ㄗ ㄘ ㄙ

| | ㄅ | ㄆ | ㄇ | ㄈ | ㄉ | ㄊ | ㄋ | ㄌ | ㄍ | ㄎ | ㄏ | ㄐ | ㄑ | ㄒ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 漢語拼音 | b | p | m | f | d | t | n | l | g | k | h | j | q | x |
| 通用拼音 | b | p | m | f | d | t | n | l | g | k | h | j | c | s |

| | ㄓ | ㄔ | ㄕ | ㄖ | ㄗ | ㄘ | ㄙ | ㄚ | ㄛ | ㄜ | ㄝ | ㄞ | ㄟ | ㄠ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 漢語拼音 | zh | ch | sh | r | z | c | s | a | o | e | e | ai | ei | ao |
| 通用拼音 | jh | ch | sh | r | z | c | s | a | o | e | e | ai | ei | ao |

| | ㄡ | ㄢ | ㄣ | ㄤ | ㄥ | ㄦ | ㄧ | ㄨ | ㄩ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 漢語拼音 | ou | an | en | ang | eng | er | i, y | u, w | yu, iu |
| 通用拼音 | ou | an | en | ang | eng | er | i, y | u, w | yu, iu |

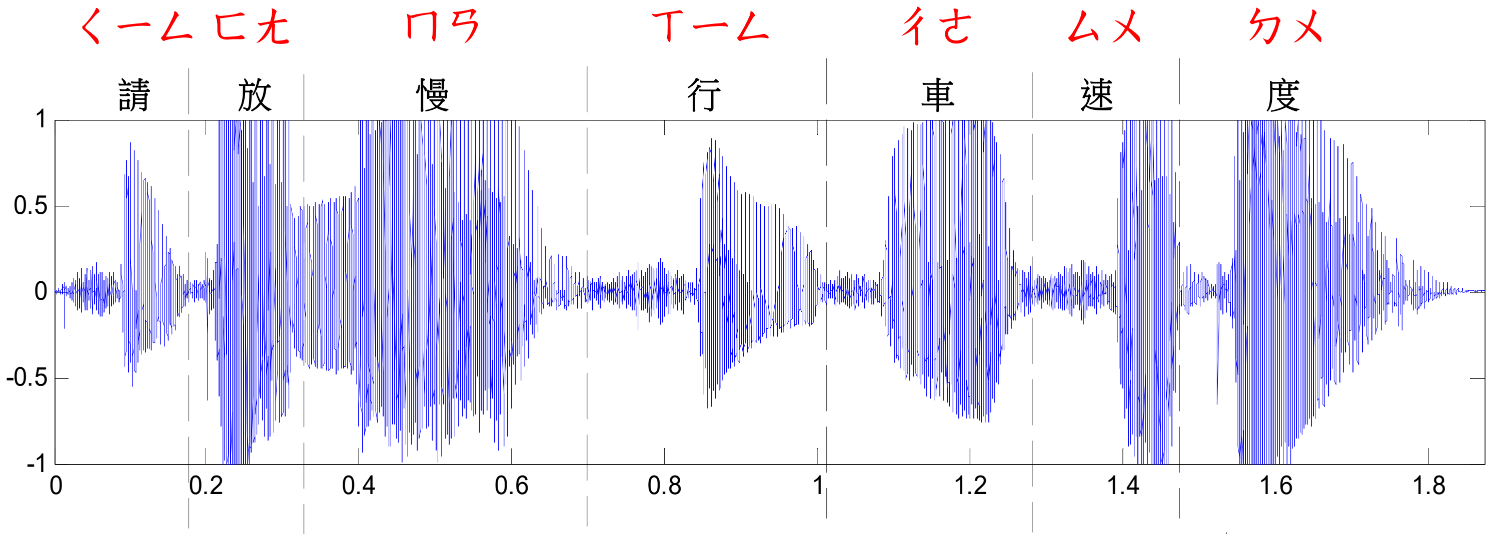
母 音： 依唇型而定

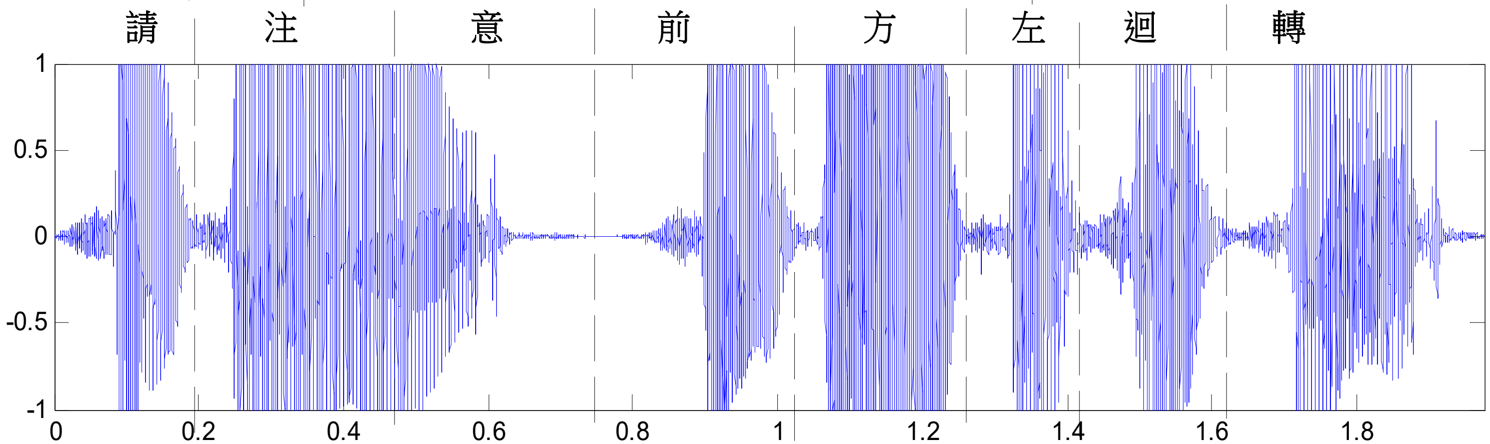
子 音： 在口腔，鼻腔中某些部位將氣流暫時堵住後放開

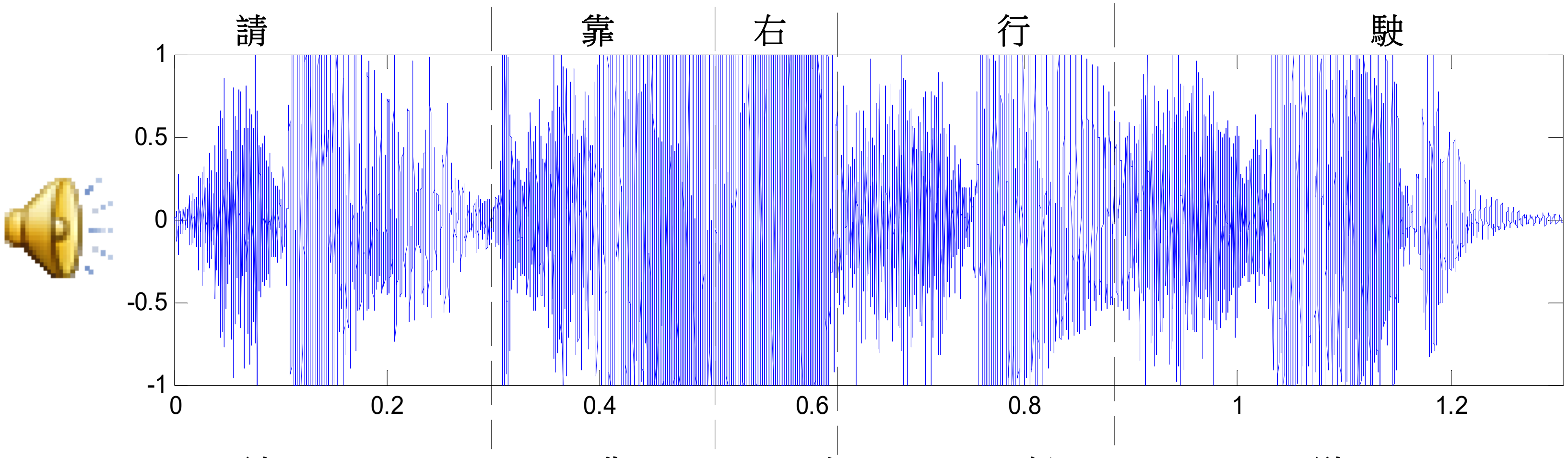
在頻譜上：

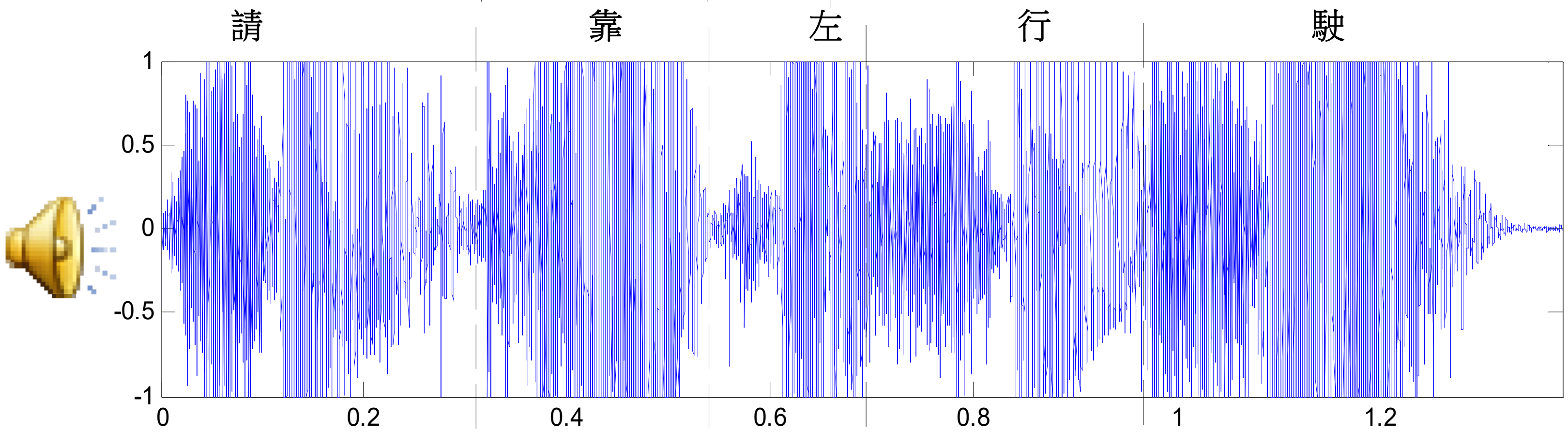
子音的能量小，頻率偏高，時間較短，出現在母音前

母音的能量大，頻率偏低，時間較長，出現在子音後或獨立出現


ㄑㄧㄥ ㄈㄤ ㄇㄢ ㄒㄧㄥ ㄔㄜ ㄙㄨ ㄉㄨ
請 放 慢 行 車 速 度
1
0.5
0
-0.5
-1
0 0.2 0.4 0.6 0.8 1 1.2 1.4 1.6 1.8


請 注 意 前 方 左 迴 轉
1
0.5
0
-0.5
-1
0 0.2 0.4 0.6 0.8 1 1.2 1.4 1.6 1.8


請
靠
右
行
駛
1
0.5
0
-0.5
-1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2


請
靠
左
行
駛
1
0.5
0
-0.5
-1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2

發音模型 (線性非時變近似)

$X(z) = R(z)H(z)G(z)Ep(z)$

$R(z)$ ：嘴唇模型， $H(z)$: 口腔模型， $G(z)$：聲帶模型
$Ep(z)$：輸入(假設為週期脈衝)

音量和 $G(z)$ 有關
子音和 $H(z)$, $R(z)$有關
母音和 $R(z)$有關

- 分析一個聲音信號的頻譜：

  用**Windowed Discrete-Time Fourier Transform**

  或稱作 **Short-Time Discrete Fourier Transform**

- Discrete-time Fourier transform

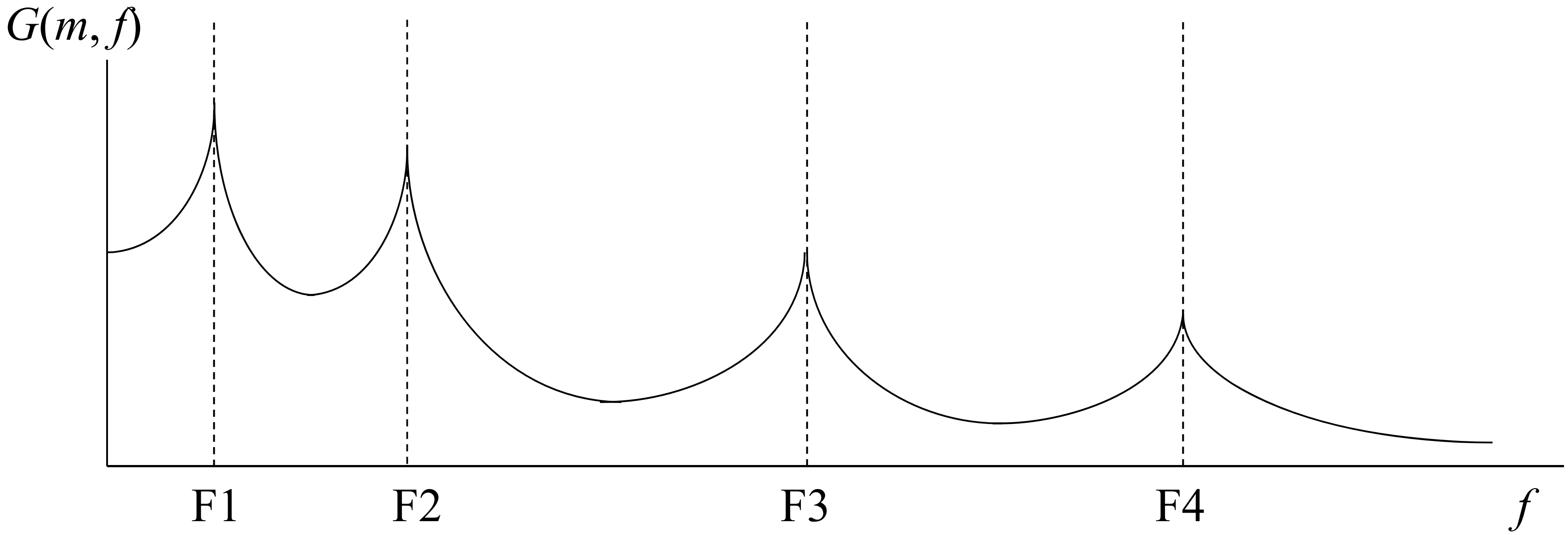
$$G(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n]e^{-j2\pi f n\Delta_t}$$

Windowed discrete-time Fourier transform

$$G(m,f)=\sum_{n=m-B}^{m+B} g[n]e^{-j2\pi f n\Delta_t}$$ 強調 $n=m$ 附近的區域

或 $$G(m,f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} w[m-n]g[n]e^{-j2\pi f n\Delta_t}$$

典型的聲音頻譜：




頻譜上，大部分的地方都不等於0。

出現幾個 peaks 值

可以依據 peaks 的位置來辨別母音

母音 peaks 處的頻率 (Hz)：

| | 男聲 | | | 女聲 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | F1 | F2 | F3 | F1 | F2 | F3 |
| ㄚ | 900 | 1200 | 2900 | 1100 | 1350 | 3100 |
| ㄛ | 560 | 800 | 3000 | 730 | 1100 | 3200 |
| ㄜ | 560 | 1090 | 3000 | 790 | 1250 | 3100 |
| ㄝ | 500 | 2100 | 3100 | 600 | 2400 | 3300 |
| ㄧ | 310 | 2300 | 3300 | 360 | 3000 | 3500 |
| ㄨ | 370 | 540 | 3400 | 460 | 820 | 3700 |
| ㄩ | 300 | 2100 | 3400 | 350 | 2600 | 3200 |
| ㄦ | 580 | 1500 | 3200 | 760 | 1700 | 3200 |

原則上： (1) 嘴唇的大小，決定F1

(2) 舌面的高低，決定 F2 – F1

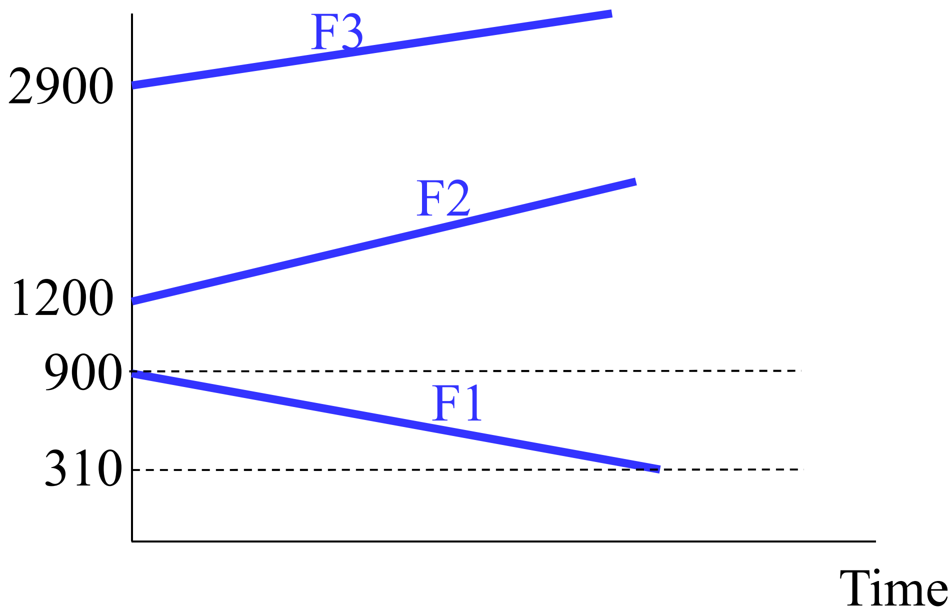
- 雙母音：

  ㄚㄧ　ㄝㄧ　ㄠㄛ　ㄛㄨ

  ㄞ (ai)， ㄟ (ei)， ㄠ (ao)， ㄡ (ou)

  頻譜隨時間而改變，一開使始像第一個母音，後變得像另一個母音

ㄞ 的頻譜 的 peaks位置



# ⊙ 6-F 語意學的角色

以「語意學」或「機率」來補足語音辨識的不足

例如：經過判定，一個聲音可能是

ㄅㄧ ㄖㄢ　　ㄆㄧ ㄖㄢ

ㄅㄧ ㄌㄢ　　ㄆㄧ ㄌㄢ

這個聲音是「必然」的機率比較大。

ㄅㄛ ㄅㄛ　　ㄆㄛ ㄆㄛ

可能是「伯伯」，也可能是「婆婆」，看上下文

儲存詞庫

- 當前主流的語音辨識技術：

Mel-Frequency Cepstrum + 語意分析 + Machine Learning (人工智慧的一種)

# 附錄七之一：線性代數觀念補充

(1) $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 兩個向量的內積可表示成 $<\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y}>$

(2) 兩個互相正交(orthogonal)或垂直(perpendicular)的向量，其內積為0。
可表示成:$<\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y}>=0$ 或 $<\mathbf{x},\mathbf{y}>=0$

(3) 令 S 為內積空間V的一組正交集合(set)且由非零向量構成，

$$\text{其中}\quad \mathbf{x}=\sum_{\mathbf{y}\in S} a_y\mathbf{y},\qquad a_y=\frac{<\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y}>}{<\mathbf{y}\,|\,\mathbf{y}>}$$

如果 S 是由一組正規集合(orthonormal set)構成，那麼 $a_y=<\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y}>$

(4) Gram-Schmidt algorithm: 對於內積空間V的任意一組基底 $<\mathbf{x_1},\mathbf{x_2},\ldots,\mathbf{x_n}>$，我們可以透過這演算法找到一組正交基底 $<\mathbf{y_1},\mathbf{y_2},\ldots,\mathbf{y_n}>$

$$\mathbf{y_j} = \mathbf{x_j} - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{<\mathbf{x_j} \mid \mathbf{y_i}>}{<\mathbf{y_i} \mid \mathbf{y_i}>}\mathbf{y_i} \quad \textit{for each } j = 2,\ldots,n$$

幾何意義:把 $\mathbf{x_j}$ 在 $\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2}, \ldots, \mathbf{y_{j-1}}$上面的分向量全都從向量 $\mathbf{x_j}$ 身上扣掉之後，剩下的向量 $\mathbf{y_j}$ 自然就會跟 $\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2}, \ldots, \mathbf{y_{j-1}}$ 垂直。

(5) Solving $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ but $\;size(\mathbf{A}) = m \times n \;\; and \;\; \mathbf{b} \in F^m$ , $m > n$

Interpolation Theorem (插值定理)

1. For any inner-product function of $F^m$, there exists a vector $\mathbf{z}$ that minimizes
   $\|\mathbf{Az} - \mathbf{b}\|$ where $\mathbf{z} \in F^n$

2. If rank($\mathbf{A}$) = $n$, then $\mathbf{z} = \left(\mathbf{A}^H\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^H\mathbf{b}$ is the unique minimizer of $\|\mathbf{Az} - \mathbf{b}\|$

# 附錄七之二：PCA and SVD

PCA (principle component analysis) 是資料分析和影像處理當中常用到的數學方法，用來分析資料的「主要成分」或是影像中物體的「主軸」。

它其實和各位同學在高中和大一線代所學的回歸線 (regressive line) 很類似。回歸線是用一條一維 (one-dimensional) 的直線來近似二維 (two-dimensional) 的資料，而 PCA 則是用 $M$-dimensional data 來近似 $N$-dimensional data ，其中 $M$ 小於等於 $N$

在講解 PCA 之前，先介紹什麼是 SVD (singular value decomposition)

我們在大一的時候，都已經學到該如何對於 $N$ x $N$ 的矩陣做 eigenvector -eigenvalue decomposition

那麼………

<u>當一個矩陣的 size 為 $M$ x $N$ 且 $M$ 和 $N$ 不相等時，我們該如何對它來做 eigenvector-eigenvalue decomposition?</u>

## SVD 的流程：

假設 **A** 是一個 $M \times N$ 的矩陣。

(Step 1) 計算

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^H\mathbf{A} \qquad \mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{A}^H$$

注意，**B** 是 $N \times N$ 的矩陣，而 **C** 是 $M \times M$ 的矩陣。上標H代表 Hermitian matrix，相當於做共軛轉置。

(Step 2) 接著，對 **B** 和 **C** 做 eigenvector-eigenvalue decomposition

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^{-1} \qquad \mathbf{C} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{-1}$$

其中 **V** 的每一個 column 是 **B** 的 eigenvector (with normalization)，**U** 的每一個 column 是 **C** 的 eigenvector (with normalization)，**Λ** 和 **D** 都是對角矩陣，**Λ** 和 **D** 對角線上的 entries 是 **B** 和 **C** 的 eigenvalues。並假設 eigenvectors 根據 eigenvalues 的大小排序 (由大到小)

Note: 值得注意的是，由於 $\mathbf{B} = \mathbf{B}^H$ 且 $\mathbf{C} = \mathbf{C}^H$，所以 **B** 和 **C** 的 eigenvectors 皆各自形成一個 orthogonal set。經過適當的 normalization 使得 **U** 和 **V** 的 column 自己和自己的內積為 1 之後，$\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^H$ 和 $\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}^H$將滿足。因此，**B** 和 **C** 可以表示成

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^H \qquad \mathbf{C} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H$$

注意，**V**和**U**是unitary matrix

(Step 3) 計算

$$\mathbf{S_1} = \mathbf{U^H A V} \qquad\qquad \mathbf{S} = |\mathbf{S_1}| \quad \text{取絕對值}$$

**S** 是一個 $M$ x $N$ 的矩陣，只有在 $\mathbf{S}[n, n]$ $(n = 1, 2, \ldots, \min(M, N))$ 的地方不為 0

(Step 4) 若 $\boldsymbol{S}_1[n, n] < 0$，改變 **U** 第 $n$ 個 column 的正負號

即完成 SVD

$$\mathbf{A = USV^H}$$

A 也可以表示為

$$\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{u_1} \mathbf{v_1^T} + \lambda_2 \mathbf{u_2} \mathbf{v_2^T} + \cdots\cdots + \lambda_k \mathbf{u_k} \mathbf{v_k^T}$$

其中 $\lambda_n = \boldsymbol{S}[n, n], \ k = \min(M, N))$

註： Matlab 有內建的 svd 指令可以計算 SVD

從 SVD 到 PCA (principle component analysis ，主成份分析)

$$\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{u_1} \mathbf{v_1^T} + \lambda_2 \mathbf{u_2} \mathbf{v_2^T} + \cdots\cdots + \lambda_k \mathbf{u_k} \mathbf{v_k^T} \qquad k = \min(M, N))$$

若 $\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \lambda_3 \geqq \ldots.. \geqq \lambda_k$

$\lambda_1 \mathbf{u_1} \mathbf{v_1^T}$ 是 A 矩陣的最主要的成份

$\lambda_2 \mathbf{u_2} \mathbf{v_2^T}$ 是 A 矩陣的第二主要的成份

:

$\lambda_k \mathbf{u_k} \mathbf{v_k^T}$ 是 A 矩陣的最不重要的成份

若為了壓縮或是去除雜訊的考量，可以選擇 $h<k$，使得 **A** 可以近似成

$$\mathbf{A} \cong \lambda_1 \mathbf{u_1} \mathbf{v_1^T} + \lambda_2 \mathbf{u_2} \mathbf{v_2^T} + \cdots\cdots + \lambda_h \mathbf{u_h} \mathbf{v_h^T}$$

## PCA 的流程

假設現在有 $M$ 筆資料，每一筆資料 為 $N$ dimension

$$\mathbf{g_1} = [f_{1,1}\ f_{1,2}, \ldots, f_{1,N}]$$
$$\mathbf{g_2} = [f_{2,1}\ f_{2,2}, \ldots, f_{2,N}]$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{g_M} = [f_{M,1}\ f_{M,2}, \ldots, f_{M,N}]$$

(Step 1) 扣掉平均值，形成新的 data

$$\mathbf{d_m} = \begin{bmatrix} e_{m,1} & e_{m,2} & \cdots\cdots & e_{m,N} \end{bmatrix} \qquad m = 1, 2, \ldots, M$$

其中 $e_{m,n} = f_{m,n} - \tilde{f}_n$, $\qquad \tilde{f}_n = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} f_{m,n}$

(Step 2) 形成 $M$ x $N$ 的矩陣 **A**

**A** 的第 $m$ 個 row 為 $d_m$ , $\qquad m = 1, 2, \ldots, M$

(Step 3) 對 A 做 SVD 分解

$$\mathbf{A} = \mathbf{USV^H}$$

$$= \lambda_1 \mathbf{u_1 v_1^T} + \lambda_2 \mathbf{u_2 v_2^T} + \cdots\cdots + \lambda_k \mathbf{u_k v_k^T} \qquad k = \min(M, N))$$

$$\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \lambda_3 \geqq \ldots\ldots \geqq \lambda_k$$

(Step 4) 將 A 近似成

$$\mathbf{A} \cong \lambda_1 \mathbf{u_1 v_1^T} + \lambda_2 \mathbf{u_2 v_2^T} + \cdots\cdots + \lambda_h \mathbf{u_h v_h^T}$$

則每一筆資料可以近似為

$$g_{\mathbf{m}} \cong \lambda_1 u_1[m]\mathbf{v_1^T} + \lambda_2 u_2[m]\mathbf{v_2^T} + \cdots\cdots + \lambda_h u_h[m]\mathbf{v_h^T} + \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 & \tilde{f}_2 & \cdots & \tilde{f}_N \end{bmatrix}$$

除了平均值 $\begin{bmatrix} \tilde{f}_1 & \tilde{f}_2 & \cdots & \tilde{f}_N \end{bmatrix}$ 之外

$\mathbf{v_1}^{\mathbf{T}}$ 是資料的最主要成分，$\mathbf{v_2}^{\mathbf{T}}$ 是資料的次主要成分，
$\mathbf{v_3}^{\mathbf{T}}$ 是資料的第三主要成分，以此類推

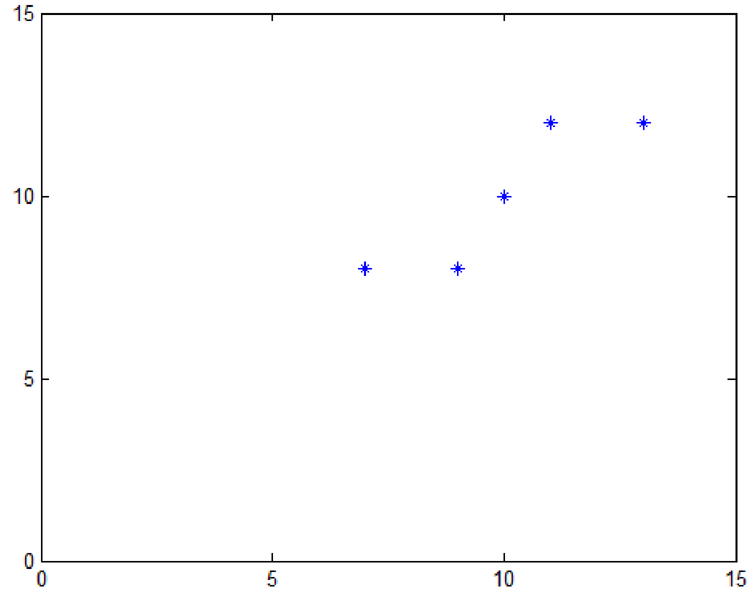
## PCA 的例子

假設在一個二維的空間中，有5個點，座標分別是

(7,8), (9,8), (10, 10), (11,12), (13,12)

$M = 5, N = 2$

試求這五個點的 PCA (即回歸線)




(Step 1) 將這五個座標點減去平均值 (10, 10)

(-3, -2), (-1 -2), (0, 0), (1, 2), (3, 2)

(Step 2) 形成 5x2 的 matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

(Step 3) 計算 SVD

$$\mathbf{A} = \mathbf{USV}^{\mathbf{H}}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -0.6116 & 0.3549 & 0 & 0.0393 & 0.7060 \\ -0.3549 & -0.6116 & 0 & 0.7060 & -0.0393 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.3549 & 0.6116 & 0 & 0.7060 & -0.0393 \\ 0.6116 & -0.3549 & 0 & 0.0393 & 0.7060 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 5.8416 & 0 \\ 0 & 1.3695 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0.7497 & -0.6618 \\ 0.6618 & 0.7497 \end{bmatrix}$$

主成分

次要成分

$$\mathbf{A} = 5.8416 \begin{bmatrix} -0.6116 \\ -0.3549 \\ 0 \\ 0.3549 \\ 0.6116 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7497 & 0.6618 \end{bmatrix} + 1.3695 \begin{bmatrix} 0.3549 \\ -0.6116 \\ 0 \\ 0.6116 \\ -0.3549 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.6618 & 0.7497 \end{bmatrix}$$

(Step 4) 得到主成分 $\begin{bmatrix}0.7497 & 0.6618\end{bmatrix}$

這五個座標點可以近似成

$$5.8416\cdot u_m\begin{bmatrix}0.7497 & 0.6618\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}10 & 10\end{bmatrix} \qquad m = 1, 2, \ldots, 5$$

$$u_1 = -0.6116, \quad u_2 = -0.3549, \quad u_3 = 0, \quad u_4 = 0.3549, \quad u_5 = 0.6116$$

回歸線

$$\begin{bmatrix}10 & 10\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0.7497 & 0.6618\end{bmatrix}$$

$$c \in (-\infty, \infty)$$