**Part 1 公式與定義總整理**

**(1) Fourier Series**

把握不同 transform 之間的「關聯性」，多比較彼此之間相同或相異的地方

|  |  |
| --- | --- |
| (1) Fourier series  (standard form) | interval: *x* ∈ [−*p*, *p*]  ,  , ,  , *a*0, *an*, *bn*: Fourier coefficients |
| (1-1) Fourier series (half range extension form) | interval: *x* ∈ [0, *L*]  將 Fourier series 的 *p* 變成 *L*/2  變成 |
| (2) Fourier cosine series (cosine series) | ,  適用情形：  (1) interval: *x* ∈ [−*p*, *p*], *f*(*x*) = *f*(−*x*)  (2) interval: *x* ∈ [0, *p*]  (half range extension 時，將 *p* 變成 *L*) |
| (3) Fourier sine series  (sine series) | 適用情形：  (1) interval: *x* ∈ [−*p*, *p*], *f*(*x*) = −*f*(−*x*)  (2) interval: *x* ∈ [0, *p*]  (half range extension 時，將 *p* 變成 *L*) |

**(2) Cauchy-Euler 的相關公式與定義**

|  |  |
| --- | --- |
| Cauchy-Euler Equation |  |
| Auxiliary of Cauchy-Euler |  |
| Linearly Independent Solutions of Cauchy-Euler Equations | |
| No repeated root at *m*0 |  |
| *k* repeated roots at *m*0 |  |
| Complex roots *α* ± *jβ* |  |
| *k* repeated roots at *α* ± *jβ* |  |

**(3)** **Chapter 6 的相關公式與定義**

|  |  |
| --- | --- |
| (i) ordinary point; (ii) regular singular point; (iii) irregular singular point | 先將 DE 變成 standard form：  (i) 若 *P*0(*x*), *P*1(*x*), …. *Pn*-1(*x*), 在 *x* = *x*0 這一點為 analytic,  則 *x*0 為**ordinary point**    (ii) 若 *P*0(*x*), *P*1(*x*), …. *Pn*-1(*x*), 在 *x* = *x*0 不為 analytic,  但 (*x*−*x*0)*nP*0(*x*), (*x*−*x*0)*n*-1*P*1(*x*), ...... (*x*−*x*0)*Pn*-1(*x*) 在 *x* = *x*0為 analytic, 則 *x*0 為 **regular singular point**  (iii) 以上二條件皆不滿足，則 *x*0 為 **irregular singular point** |
| regular singular point 的情形下， ***r*2 − *r*1 = integer** 時，有時(並非所有情況) 要用這個式子求 *y*2(*x*) |  |

**(4) Chapter 11 的相關公式與定義**

|  |  |
| --- | --- |
| inner product | \*: conjugate |
| orthogonal |  |
| square norm |  |
| norm |  |
| normalize | *ψ*(*x*)  註： |
| orthogonal set | for *m* ≠ *n*, no constraint for |
| orthonormal set | for *m* ≠ *n*, |
| orthogonal series expansion | where  inner products |
| inner product with weight function |  |
| orthogonal with respect to a weight function | 其他 norm, square norm, orthogonal series expansion 的定義在考慮 weight function 時，都是將  改為 |
| even and odd | If *f*(*x*) is even,   If *f*(*x*) is odd, |

**(5) Chapter 12 的相關公式與定義**

|  |  |
| --- | --- |
| hyperbolic | for |
| elliptic | 同上，但 |
| parabolic | 同上，但 |
| wave equation |  |
| Laplace’s equation |  |
| Dirichlet condition | *u* = …….. |
| Neumann condition |  |
|  | 解： ,  *n* = 1, 2, 3, …… |

**(6) 其他重要公式**

|  |  |
| --- | --- |
| Taylor series for *f*(*x*) |  |
| Taylor series for exp(*x*) |  |
| Taylor series for cos(*x*) |  |
| Taylor series for sin(*x*) |  |
| Taylor series for ln(1+*x*) |  |
|  |  |
| cos(*a*+*b*) = | cos(*a*)cos(*b*) − sin(*a*) sin (*b*) |
| sin(*a*+*b*) = | sin(*a*)cos(*b*) + cos(*a*)sin (*b*) |
| cos(*a*)cos(*b*) = | [cos(*a* + *b*) + cos(*a* − *b*)]/2 |
| sin(*a*)sin(*b*) = | [−cos(*a* + *b*) + cos(*a* − *b*)]/2 |
| sin(*a*)cos(*b*) = | [sin(*a* + *b*) + sin(*a* − *b*)]/2 |
| cos(2*a*) = | cos2(*a*) − sin2(*a*) or 1 − 2sin2(*a*) or 2cos2(*a*) − 1 |
| sin(2*a*) = | 2sin *a* cos *a* |
| cosh*x* = |  |
| sinh*x* = |  |
| sinh(0) = | 0 |
| cosh(0) = | 1 |
|  | 0 |

公式雖然多，但是把握彼此之間的關係，注意相同或相異之處，就可以較容易的記起來

**Part 2 「解法」總整理**

(一) 使用 **variation of parameters 的方法求 particular solutions**

**流程： Page 235 (2nd order) and Page 242 (Higher order)**

(Step 1) Standard Form 

(Step 2) Calculate *W*, *W*1, *W*2, …., *Wn* (see page 243)

(Step 3) , , ….., 

(Step 4) , , ….., 

(Step 5) 

**(二) Nonhomogeneous Cauchy-Euler Equations 的解**

方法1: 使用 **variation of parameters**

範例： Page 262

方法2: (Step 1): Set *x* = *et*, (use *t* instead of *x* as the independent variable)

(Step 2): Determine the auxiliary function, then replace *m* by *Dt*

(Step 3): Solve the DE

(Step 4): Set *t* = ln *x*

範例： Pages 264, 265

**(三) *n*th order linear DE 的 series solutions 解法**



 (*k* = 0, 1, …, *n*) 必需為多項式，若不是，要先用 Taylor series 展開

**(Case 1)** **條件：**當 *x*0 為 ordinary point 時

**方法：** 假設 ，代入原式

**流程：** 5 個 steps, 參考講義 278頁

**(Case 2)** **條件：**當 *x*0 為 regular singular point 時

**方法：** 假設 ，代入原式 (即 Frobenius Method)

**流程：** 7 個 steps, 參考講義 298-299 頁，

**• Case 2 的特殊情形：**

當 *r*1 ≠ *r*2  and *r*1, *r*2 are real, ***r*2 − *r*1 = integer**

「有的時候」用講義 298頁的方法只能得出一個independent solution *y*1(*x*)

必需根據  和長除法解出第二個 independent solution

**範例：** 見講義308-309 頁

**(四) 用 Fourier Series 來解 Particular Solutions**

**精神**：當 *f*(*t*) = *f*(*t* + 2*p*) 時，用 Fourier series, Furier cosine series, 或 Fouries sine series將 *f*(*t*) 表示成 1, ,  的 linear combination

**流程：** 見講義405, 406 頁

**範例：** 見講義407-410 頁

**(五) Partial Differential Equations 用 Separation of Variables 的解法**

**精神：** 例如當 independent variables 為*x* and *y* 時，

假設 ，代入原式

使得 **PDE ODE**

**流程：** 7 個 Steps, 講義 420-422 頁 (非常重要，請熟悉)   
**注意**： (1) 其中 Steps 3, 4, 5 要分成不同的 cases 來解

(2) 要將 Steps 3, 4, 5 **所有的解**都**加起來** (Step 6)  
(尤其是處理 boundary value problems 時)

(3) 經常把  表示成 

(4) “等於零” 的 IVP 或 BVP 先於 Steps 3, 4 處理  
 例如， *u*(*L*, *y*) = 0 → *X*(*L*) = 0   
  → *Y* ′(*b*) = 0.   
 “不等於零” 的 IVP 或 BVP，要在 Step 7 當中處理

(5) 其他需注意的地方：整理於講義 451-454 頁

**Part 3 補充**

同學們若覺得以上的整理，還漏掉哪些公式、定義、或解法，就在這邊補充吧！