Part 1 公式與定義總整理

(1) Series, Integral, and Transform (非常重要)

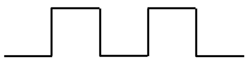
把握不同 transform 之間的「關聯性」，多比較彼此之間相同或相異的地方

(1) Laplace Transform	$L\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$
(2) Fourier series (standard form)	interval: $x\in[-p,p]$ $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{p}x+b_n\sin\frac{n\pi}{p}x\right)$, $a_0=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)dx$, $a_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)\cos\frac{n\pi}{p}xdx$, $b_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)\sin\frac{n\pi}{p}xdx$, a_0, a_n, b_n: Fourier coefficients
(2-1) Fourier series (half range extension form)	interval: $x\in[0,L]$ $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{2n\pi}{L}x\right)$, $a_0=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx$, $a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{2n\pi}{L}xdx$, $b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{2n\pi}{L}xdx$, a_0, a_n, b_n: Fourier coefficients
(3) Fourier cosine series (cosine series)	$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{p}x$ $a_0=\frac{2}{p}\int_0^p f(x)dx$, $a_n=\frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cos\frac{n\pi}{p}xdx$ 適用情形： (1) interval: $x\in[-p,p]$, $f(x)=f(-x)$ (2) interval: $x\in[0,p]$ (half range extension 時)
(4) Fourier sine series (sine series)	$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{p}x$ $b_n=\frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin\frac{n\pi}{p}xdx$ 適用情形： (1) interval: $x\in[-p,p]$, $f(x)=-f(-x)$ (2) interval: $x\in[0,p]$ (half range extension 時)

(5) Fourier integral (Sec. 14-3)	interval: $x \in (-\infty, \infty)$ $f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty [A(\alpha)\cos(\alpha x)+B(\alpha)\sin(\alpha x)]d\alpha$ $A(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\alpha x)dx$ $B(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(\alpha x)dx$
(6) Fourier cosine integral (或 cosine integral) (Sec. 14-3)	$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty A(\alpha)\cos(\alpha x)d\alpha$, $A(\alpha)=\int_0^\infty f(x)\cos(\alpha x)dx$ 適用情形： (1) interval: $x \in (-\infty,\infty)$, $f(x)=f(-x)$ (standard) (2) interval: $x \in [0, \infty)$ (half range extension 時)
(7) Fourier sine integral (或 sine integral) (Sec. 14-3)	$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty B(\alpha)\sin(\alpha x)d\alpha$, $B(\alpha)=\int_0^\infty f(x)\sin(\alpha x)dx$ 適用情形： (1) interval: $x \in (-\infty,\infty)$, $f(x)=f(-x)$ (standard) (2) interval: $x \in [0, \infty)$ (half range extension 時)
(8) Fourier transform (Sec. 14-4) (即 Fourier integral of complex form，或 Fourier integral of exponential form)	interval: $x \in (-\infty, \infty)$ $\Im[f(x)]=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{j\alpha x}dx=F(\alpha)$
(8-1) inverse Fourier transform	$\Im^{-1}[F(\alpha)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)e^{-j\alpha x}d\alpha=f(x)$
(9) Fourier cosine transform (Sec. 14-4)	$\Im_c[f(x)]=\int_0^\infty f(x)\cos(\alpha x)dx=F(\alpha)$ 適用情形： (1) interval: $x \in (-\infty,\infty)$, $f(x)=f(-x)$ (standard) (2) interval: $x \in [0, \infty)$ (half range extension 時)
(9-1) inverse Fourier cosine transform	$\Im_c^{-1}[F(\alpha)]=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty F(\alpha)\cos(\alpha x)d\alpha=f(x)$
(10) Fourier sine transform (Sec. 14-4)	$\Im_s[f(x)]=\int_0^\infty f(x)\sin(\alpha x)dx=F(\alpha)$ 適用情形： (1) interval: $x \in (-\infty,\infty)$, $f(x)=-f(-x)$ (standard) (2) interval: $x \in [0, \infty)$ (half range extension 時)
(10-1) inverse Fourier sine transform	$\Im_s^{-1}[F(\alpha)]=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty F(\alpha)\sin(\alpha x)d\alpha=f(x)$

(2) 和 Laplace Transform 相關的公式 (很重要)

Laplace transform	$L\{f(t)\}=\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$
Differentiation $L\left\{f^{(n)}(t)\right\}=$	$s^n F(s)-s^{n-1} f(0)-s^{n-2} f'(0)-\cdots\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$
Multiplication by t $L\left\{t^n f(t)\right\}=$	$(-1)^n \dfrac{d^n}{ds^n} F(s)$
Integration	$L\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}=\dfrac{F(s)}{s}$
Multiplication by exp	$L\left\{e^{at} f(t)\right\}=F(s-a)$
Translation (I)	$L\{f(t-a)u(t-a)\}=e^{-as}F(s)$
Translation (II)	$L\{g(t)u(t-a)\}=e^{-as}L\{g(t+a)\}$
Convolution property	convolution: $y(t)=f(t)*g(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ $L\{y(t)\}=F(s)G(s)$
Periodic input If $f(t)=f(t+T)$	$L\{f(t)\}=\dfrac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st} f(t)dt$
$L\{1\}=$	$1/s$
$L\{u(t)\}=$	$1/s$
$L\{t^n\}=$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
$L\{\exp(at)\}=$	$\dfrac{1}{s-a}$
$L\{\sin(kt)\}=$	$\dfrac{k}{s^2+k^2}$
$L\{\cos(kt)\}=$	$\dfrac{s}{s^2+k^2}$
$L\{\sinh(kt)\}=$	$\dfrac{k}{s^2-k^2}$

$L\{\cosh(kt)\} =$	$\dfrac{s}{s^2-k^2}$
※ $L\{t\sin(kt)\} =$	$\dfrac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$ ※ 代表量力而為，時間夠才記的公式
※ $L\{t\cos(kt)\} =$	$\dfrac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}$
※ $L\{t\sinh(kt)\} =$	$\dfrac{2ks}{(s^2-k^2)^2}$
※ $L\{t\cosh(kt)\} =$	$\dfrac{s^2+k^2}{(s^2-k^2)^2}$
$L\{u(t-t_0)\} =$	$\dfrac{e^{-t_0 s}}{s}$
$L\{\delta(t)\} =$	1
$L\{\delta(t-t_0)\} =$	$e^{-t_0 s}$
※ $L\{f(t)\}$  $f(t) = 1$ for $0 < t < a$ $f(t) = 0$ for $a < t < 2a$ $f(t) = f(t+2a)$	$\dfrac{1}{s(1+e^{-as})}$

(3) 常用積分表

$\int \frac{1}{x}dx =$	$\ln\lvert x\rvert + c$
$\int x\,e^{ax}\,dx =$	$\dfrac{e^{ax}}{a}\left(x-\dfrac{1}{a}\right)+c$
※ $\int x^2e^{ax}\,dx =$	$\dfrac{e^{ax}}{a}\left(x^2-\dfrac{2x}{a}+\dfrac{2}{a^2}\right)+c$
$\int \dfrac{1}{x^2+a^2}\,dx =$	$\dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{x}{a}+c$
$\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx =$	$\sin^{-1}\dfrac{x}{a}+c$
$\int \sin x\,dx =$	$-\cos x + c$
$\int \cos x\,dx =$	$\sin x + c$

(4) Hyperbolic functions

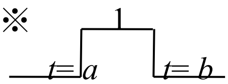
cosh$x$ =	$\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$
sinh$x$ =	$\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$
cosh($-x$) =	cosh(x)
sinh($-x$) =	$-$sinh(x)
sinh(0) =	0
cosh(0) =	1
$\left.\dfrac{d}{dx}\cosh x\right\|_{x=0} =$	0
$\dfrac{d}{dx}\cosh x =$	sinh(x)
$\dfrac{d}{dx}\sinh x =$	cosh(x)

(5) Chapter 6 的相關公式與定義 (頗多，註明 ※ 者，若時間有限，則不需硬記)

Analytic 的定義	$f(x_0), f'(x_0), f''(x_0), f'''(x_0)\cdots\cdots$ 皆為 finite 則 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 這一點為 analytic (Section 6.2)
(i) ordinary point (ii) regular singular point (iii) irregular singular point	先將 DE 變成 standard form： $y^{(n)}+P_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots\cdots+P_1(x)y'+P_0(x)y=0$ ($y^{(n)}$ 的 coefficient 變成 1) (i) 若 $P_0(x), P_1(x), \ldots. P_{n-1}(x)$, 在 $x = x_0$ 這一點為 analytic, 則 x_0 為 **ordinary point** (ii) 若 $P_0(x), P_1(x), \ldots. P_{n-1}(x)$, 在 $x = x_0$ 不為 analytic, 但 $(x-x_0)^nP_0(x), (x-x_0)^{n-1}P_1(x), \ldots\ldots (x-x_0)P_{n-1}(x)$ 在 $x = x_0$ 為 analytic, 則 x_0 為 **regular singular point** (iii) 以上二條件皆不滿足，則 x_0 為 **irregular singular point**

regular singular point 的情形下， $r_2 - r_1 =$ **integer** 時，有時(並非所有情況) 要用這個式子求 $y_2(x)$	$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)}dx$
Bessel's equation of order v	$x^2y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0$
Legendre's equation of order n	$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$
※ Gamma function	$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ ※ 代表量力而為，未必要記的公式
※ Gamma function 和 $n!$ 之間的關係	$\Gamma(n+1) = n!$ when n is a positive integer $\Gamma(1) = 0! = 1$
※ $\Gamma(x+1) =$	$x\Gamma(x)$
※ Gamma function 幾個特殊值	$\Gamma(n) \to \infty$ when n is a negative integer or $n = 0$ $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$
※ Bessel functions of the first kind of order v	$J_v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(1+v+n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+v}$

(6) Chapter 7 的相關公式與定義

of exponential order	$\lvert f(t)\rvert \le Me^{ct}$
Step function	$u(t-a) = 1$ for $t > a$, $u(t-a) = 0$ for $t < a$,
※  以 step function 表示	$u(t-a) - u(t-b)$
Dirac delta function (又稱 unit impulse function)	$\delta(t-t_0) = \begin{cases} \infty & \text{for } t = t_0 \\ 0 & \text{for } t \ne t_0 \end{cases}$
convolution (旋積) 很重要，一定要會	$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ 這裡 * 代表旋積
Integration for $\delta(t-t_0)$	$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)dt = 1$

Sifting property for $\delta(t-t_0)$	$\int_p^q f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$
Relation between $\delta(t-t_0)$ and the step function	$\int_{-\infty}^t \delta(\tau-t_0)d\tau = u(t-t_0)$ $\quad \frac{d}{dt}u(t-t_0) = \delta(\tau-t_0)$

(7) Chapter 11 的相關公式與定義

inner product	$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x) f_2^*(x) dx$
orthogonal	$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x) f_2^*(x) dx = 0$
square norm	$\|f(x)\|^2 = (f(x), f(x)) = \int_a^b f(x) f^*(x) dx = \int_a^b \|f(x)\|^2 dx$
norm	$\|f(x)\| = \sqrt{(f(x), f(x))} = \sqrt{\int_a^b f(x) f^*(x) dx} = \sqrt{\int_a^b \|f(x)\|^2 dx}$
inner product with weight function	$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x) f_2^*(x) w(x) dx$
orthogonal with respect to a weight function	$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x) f_2^*(x) w(x) dx = 0$
※ square norm with respect to a weight function	$\|f(x)\|^2 = (f(x), f(x)) = \int_a^b \|f(x)\|^2 w(x) dx$
※ norm with respect to a weight function	$\|f(x)\| = \sqrt{(f(x), f(x))} = \sqrt{\int_a^b \|f(x)\|^2 w(x) dx}$
normalize	$\psi(x) \longrightarrow v(x) = \frac{\psi(x)}{\|\psi(x)\|}$ 註：$\|v(x)\| = 1$
orthogonal set	If $(\phi_m(x), \phi_n(x)) = 0$ for $m \neq n$ $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \phi_3(x), \ldots\ldots\}$ is an orthogonal set 註： $(\phi_m(x), \phi_n(x))$ 指的是 $\phi_m(x)$ 和 $\phi_n(x)$ 的 inner product
orthonormal set	If $(\phi_m(x), \phi_n(x)) = 0$ for $m \neq n$ $(\phi_n(x), \phi_n(x)) = 1$ $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \phi_3(x), \ldots\ldots\}$ is an orthonormal set

orthogonal series expansion	$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\phi_n(x)$ where $c_n=\dfrac{(f(x),\phi_n(x))}{(\phi_n(x),\phi_n(x))}$ ← inner products
算 Fourier coefficients 時經常用到	$\int_a^b u(t)v'(t)\,dt = u(t)v(t)\Big\vert_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,dt$
在不連續的點	If $f(x)$ is not continuous at x_0 and $f_1(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\dfrac{n\pi}{p}x+b_n\sin\dfrac{n\pi}{p}x\right)$ then $f_1(x_0)=\dfrac{f(x_0+)+f(x_0-)}{2}$
even and odd	If $f(x)$ is even, $\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx$ If $f(x)$ is odd, $\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=0$
$\cos(n\pi)$ and $\sin(n\pi)$	$\cos(n\pi)=(-1)^n$ $\sin(n\pi)=0$

(8) Chapter 12 的相關公式與定義

hyperbolic	for $A\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\dfrac{\partial u}{\partial x}+E\dfrac{\partial u}{\partial y}+Fu=0$ $B^2-4AC>0$
elliptic	同上，但 $B^2-4AC<0$
parabolic	同上，但 $B^2-4AC=0$
heat equation (one-dimensional heat equation)	$k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial u}{\partial t}$ $k>0$
wave equation (one-dimensional wave equation)	$a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$
Laplace's equation (two-dimensional form of Laplace's equation)	$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$
Laplacian: ∇^2	$\nabla^2 u(x,y)=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ $\nabla^2 u(x,y,x)=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

Dirichlet condition	$u = \ldots\ldots$
Neumann condition	$\frac{\partial u}{\partial n} = \cdots\cdots$
Robin condition	$\frac{\partial u}{\partial n} + hu = \cdots\cdots$
$X''(x) + \lambda X(x) = 0$ $X(0) = 0 \quad X(L) = 0$	解： $X(x) = c_2 \sin\frac{n\pi}{L}x$, $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$ $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$
$X''(x) + \lambda X(x) = 0$ $X'(0) = 0 \quad X'(L) = 0$	解： $X(x) = c_1$ $\lambda = 0$ 或 $X_n(x) = c_1 \cos\frac{n\pi}{L}x$ $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$ $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$

(10) Chapter 14 的相關公式與定義

Differentiation property for Fourier transform	$\Im[f'(x)] = -j\alpha F(\alpha)$ $\Im[f^{(n)}(x)] = (-j\alpha)^n F(\alpha)$
Differentiation property for Fourier cosine transform	$\Im_c[f'(x)] = \alpha \Im_s[f(x)] - f(0)$ $\Im_c[f''(x)] = -\alpha^2 \Im_c[f(x)] - f'(0)$
Differentiation property for Fourier sine transform	$\Im_s[f'(x)] = -\alpha \Im_c[f(x)]$ $\Im_s[f''(x)] = -\alpha^2 \Im_s[f(x)] + \alpha f(0)$
※ Integral for sinc functions	$\int_0^\infty \frac{\sin\alpha}{\alpha} d\alpha = \frac{\pi}{2}$

(11) Taylor series

$f(x) =$	$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^m}{m!} f^{(m)}(x_0)$
$\exp(x) =$	$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}$

$\sin(x) =$	$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1}$
$\cos(x) =$	$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m}$

(12) 三角函式表

$\cos(a+b) =$	$\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
$\sin(a+b) =$	$\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
$\cos(a-b) =$	$\cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
$\sin(a-b) =$	$\sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$
$\cos(a)\cos(b) =$	$[\cos(a+b) + \cos(a-b)]/2$
$\sin(a)\sin(b) =$	$[-\cos(a+b) + \cos(a-b)]/2$
$\sin(a)\cos(b) =$	$[\sin(a+b) + \sin(a-b)]/2$
$\cos(2a) =$	$\cos^2(a) - \sin^2(a)$ or $1 - 2\sin^2(a)$ or $2\cos^2(a) - 1$
$\sin(2a) =$	$2\sin a \cos a$
$\cos^2 a =$	$[\cos(2a) + 1]/2$
$\sin^2 a =$	$[1 - \cos(2a)]/2$

公式雖然多，但是把握彼此之間的關係，比較相同相異處，就可以較快地記起來

Part 2 「解法」總整理

(一) n^{th} order linear DE 的 series solutions 解法

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$$

$$y^{(n)}+P_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots\cdots+P_1(x)y'+P_0(x)y=0 \qquad P_m(x)=\frac{a_m(x)}{a_n(x)}$$

(Case 1) 條件：當 x_0 為 ordinary point 時

方法： 假設 $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$ ，代入原式

流程： 5 個 steps, 參考講義 352 頁，

範例： 講義 353, 357, 361 頁

Interval of convergence 的判斷方法：

(1) 找出 $\lim_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{c_n(x-x_0)^n}<1$ 的條件 (較嚴謹，較正確)

(2) 直接把 interval of convergence 寫成 $|x-x_0|<R$, R 是 x_0 和最近的 singular point 之間的距離

(Case 2) 條件：當 x_0 為 regular singular point 時

方法： 假設 $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^{n+r}$ ，代入原式 (即 Frobenius 法)

流程： 7 個 steps, 參考講義 372-373 頁，

範例：講義 374-383 頁

註： **Case 2** (x_0 為 regular singular point 時) 又根據 **indicial equations** 分成三種情形

indicial equations: $(x-x_0)^p$ 當指數 p 為最小的這一項的係數，稱作 indicial equations，參考講義 384, 385 頁

以下針對 2[nd] order DE 的情形作討論

(此時 indicial equations 有 r_1, r_2 兩個 roots)

(Case 2-1) $r_1 \neq r_2$ and r_1, r_2 are real, $\boldsymbol{r_2 - r_1 \neq}$ **integer**

兩個解都為 $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^{n+r}$ 的型態，可直接用講義 372 頁的方法

(Case 2-2) $r_1 \neq r_2$ and r_1, r_2 are real, **$r_2 - r_1$ = integer**

(A) 先用講義 372 頁的方法嚐試能否解出 $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^{n+r}$ 的型態的兩個 independent solutions

(B) 若用講義 372 頁的方法只能得出一個 independent solution $y_1(x)$

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^{n+r_1}$$

則必需根據 $y_2(x)=y_1(x)\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)}dx$ 和長除法解出第二個 independent solution $y_2(x)$

(Case 2-3) $r_1 \neq r_2$ and r_1, r_2 are complex，不在本書討論範圍

(二) Laplace transform 解 DE 的方法

方法：

DE → Laplace transform → 計算 → 分解因式(若需要的話) → inverse Laplace transform

範例： 講義 453, 454 頁

主要精神：把微分簡化為乘法

- **DE → Laplace transform：**

$$a_n y^{(n)}(x)+a_{n-1}y^{(n-1)}(x)+\cdots+a_1 y'(x)+a_0 y=g(x) \rightarrow P(s)Y(s)=Q(s)+G(s)$$

$P(s)$: 即 auxiliary function, $Q(s)$: 來自 initial conditions

計算 **$Q(s)$** 的快速法

參考講義 455, 456 頁

- 分解因式的方法 **(Cover up method)** 參考 pages 442-447

$$\frac{K(s)}{(s-a_1)(s-a_2)\cdots(s-a_n)^2\cdots\cdots(s-a_N)}=\frac{A_1}{s-a_1}+\frac{A_2}{s-a_2}+\cdots+\frac{A_n+B_n(s-a_n)}{(s-a_n)^2}+\cdots+\frac{A_N}{s-a_N}$$

其中 $a_1, a_2, \ldots, a_N$ 互異，分子的 order 要小於分母的 order

則 $$A_n=\left.\frac{K(s)}{(s-a_1)(s-a_2)\cdots\cdots(s-a_{n-1})\cancel{(s-a_n)}(s-a_{n+1})\cdots\cdots(s-a_N)}\right|_{s=a_n}$$

$$B_n=\left.\frac{d}{ds}\frac{K(s)}{(s-a_1)(s-a_2)\cdots\cdots(s-a_{n-1})(s-a_{n+1})\cdots\cdots(s-a_N)}\right|_{s=a_n}$$

(三) 用 Fourier Series 來解 Particular Solutions

精神：當 $f(t) = f(t + 2p)$ 時，(亦即 $f(t)$ 有週期性時)

用 Fourier series, Furier cosine series, 或 Fouries sine series

將 $f(t)$ 表示成 $\cos\left(\frac{n\pi}{p}t\right)$, $\sin\left(\frac{n\pi}{p}t\right)$ 的 linear combination

流程： 見講義 655, 656 頁

範例： 見講義 657-660 頁

(四) Partial Differential Equations 的解法 (一)

用 Separation of Variables

精神： 例如當 independent variables 為 x and y 時，

假設 $u(x,y) = X(x)Y(y)$，代入原式

使得 **PDE** ⟶ **ODE**

流程： 7 個 Steps, 講義 724-726 頁 (非常重要，請熟悉)

注意： (1) 其中 Steps 3, 4, 5 要分成不同的 cases 來解

(2) 要將 Steps 3, 4, 5 所有的解都加起來 (Step 6)

(尤其是處理 boundary value problems 時)

(3) 經常把 $d_1 e^{2\alpha x} + d_2 e^{-2\alpha x}$ 表示成 $c_4 \cosh(2\alpha x) + c_5 \sinh(2\alpha x)$

(4) "等於零" 的 IVP 或 BVP 先於 Steps 3, 4 處理

例如， $u(L, y) = 0 \rightarrow X(L) = 0$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=b} = 0 \quad \rightarrow Y'(b) = 0.$$

"不等於零" 的 IVP 或 BVP，要在 Step 7 當中處理

(5) 當 IVP, BVP 皆不為零時，要用 superposition principle 分成兩個子問題

(參考講義 779, 780 頁)

(6) 其他需注意的地方：整理於講義 783-786 頁

範例： 講義 729-732 頁 (無 boundary condition)

講義 753-761 頁的 wave equation

講義 769-777, 778, 782 頁的 Laplace's equation

Sections 12.1, 12.2, 12.4, 12.5 的練習題

(五) Partial Differential Equations 的解法 (二)

用 Fourier Transform (或 Fourier Cosine, Sine Transforms)

精神： 藉由 Fourier transform (或 Fourier cosine transform , Fourier sine transform)，將針對其中一個變數的偏微分變成乘法

方法： (A) interval 為 $-\infty < v < \infty$ 時 → 用 **Fourier transform**

(B) interval 為 $0 < v < \infty$

而且有 $u(v, \ldots..) = 0$ or a constant when $v = 0$ 的 initial condition 時

→ 用 **Fourier sine transform**

(C) interval 為 $0 < v < \infty$

而且有 $\frac{\partial}{\partial v} u(v, \cdots\cdots) = 0$ or a constant when $v = 0$ 的 initial condition 時

→ 用 **Fourier cosine transform**

流程： 5 個 Steps, 講義 704 頁 (有一些複雜，請多練習)

範例： 講義 705-711 頁及 Section 14-4 的練習題

需注意的地方：整理於講義 712, 713 頁

(尤其注意其中第五點)

Part 3 補充

同學們若覺得以上的整理，還漏掉哪些公式、定義、或解法，就在這邊補充吧！