**Part 1 公式與定義總整理**

**(1) Series, Integral, and Transform (非常重要)**

把握不同 transform 之間的「關聯性」，多比較彼此之間相同或相異的地方

|  |  |
| --- | --- |
| (1) Laplace Transform |  |
| (2) Fourier series  (standard form) | interval: *x* ∈ [−*p*, *p*]  ,  , ,  , *a*0, *an*, *bn*: Fourier coefficients |
| (2-1) Fourier series (half range extension form) | interval: *x* ∈ [0, *L*]  將 Fourier series 的 *p* 變成 *L*/2  變成 |
| (3) Fourier cosine series (cosine series) | ,  適用情形：  (1) interval: *x* ∈ [−*p*, *p*], *f*(*x*) = *f*(−*x*)  (2) interval: *x* ∈ [0, *p*] (half range extension 時) |
| (4) Fourier sine series  (sine series) | 適用情形：  (1) interval: *x* ∈ [−*p*, *p*], *f*(*x*) = −*f*(−*x*)  (2) interval: *x* ∈ [0, *p*] (half range extension 時) |

**(2) 和 Laplace Transform 相關的公式 (很重要)**

|  |  |
| --- | --- |
| Laplace transform |  |
| Differentiation |  |
| Multiplication by *t* |  |
| Integration |  |
| Multiplication by exp |  |
| Translation (I) |  |
| Translation (II) |  |
| Convolution property | convolution: |
| Periodic input  If *f*(*t*) = *f*(*t* + *T*) |  |
| *L*{1} = | 1/*s* |
| *L*{*u*(*t*)} = | 1/*s* |
| *L*{ *tn* } = |  |
| *L*{exp(*at*)} = |  |
| *L*{sin(*kt*)} = |  |
| *L*{cos(*kt*)} = |  |
| *L*{sinh(*kt*)} = |  |
| *L*{cosh(*kt*)} = |  |
| *L*{*u*(*t* − *t*0)} = |  |
| *L*{*δ*(*t*)} = | 1 |

**(3) Chapter 7 的相關公式與定義**

|  |  |
| --- | --- |
| Step function | *u*(*t* – *a*) = 1 for *t* > *a*, *u*(*t* – *a*) = 0 for *t* < *a*, |
| convolution (旋積)  很重要，一定要會 | 這裡 \* 代表旋積 |
| Integration for *δ*(*t*−*t*0) |  |
| Sifting property for *δ*(*t*−*t*0) |  |
| Relation between *δ*(*t*−*t*0) and *u*(*t*) |  |

**(4) Chapter 11 的相關公式與定義**

|  |  |
| --- | --- |
| inner product | \*: conjugate |
| orthogonal |  |
| square norm |  |
| norm |  |
| inner product with weight function |  |
| orthogonal with respect to a weight function |  |
| normalize | *ψ*(*x*)  註： |
| orthogonal set | for *m* ≠ *n*, no constraint for |
| orthonormal set | for *m* ≠ *n*, |
| orthogonal series expansion | where  inner products |
| even and odd | If *f*(*x*) is even,   If *f*(*x*) is odd, |

**(5) 其他重要公式**

|  |  |
| --- | --- |
| cos(*a*+*b*) = | cos(*a*)cos(*b*) − sin(*a*) sin (*b*) |
| sin(*a*+*b*) = | sin(*a*)cos(*b*) + cos(*a*)sin (*b*) |
| cos(*a*)cos(*b*) = | [cos(*a* + *b*) + cos(*a* − *b*)]/2 |
| sin(*a*)sin(*b*) = | [−cos(*a* + *b*) + cos(*a* − *b*)]/2 |
| sin(*a*)cos(*b*) = | [sin(*a* + *b*) + sin(*a* − *b*)]/2 |
| cos(2*a*) = | cos2(*a*) − sin2(*a*) or 1 − 2sin2(*a*) or 2cos2(*a*) − 1 |
| sin(2*a*) = | 2sin *a* cos *a* |
| cosh*x* = |  |
| sinh*x* = |  |
| sinh(0) = | 0 |
| cosh(0) = | 1 |
|  | 0 |

公式雖然多，但是把握彼此之間的關係，注意相同或相異之處，就可以較容易的記起來

**Part 2 「解法」總整理**

**(一) Variation of Parameters (Matrix) for Particular Solution**

Suitable for any linear DE

 where   
   
 *Wk* : replace the *k*th column of *W* by , note:    
**範例**： 講義 233, 235, 237, 242 頁

**(二) Cauchy Euler Equation**

Homogeneous  
  


Nonhomogeneous  
(方法一) 使用 Variation of Parameters 範例： 講義 259 頁

(方法二) Set *t* = ln*x*, ,  範例： 講義 261 頁

**(三) Laplace transform 解 DE 的方法**

**方法：**

DE → Laplace transform → 計算 → 分解因式(若需要的話) → inverse Laplace transform

**範例**： 講義 332, 333 頁

**主要精神**：把微分簡化為乘法

 *P*(*s*)*Y*(*s*) = *Q*(*s*) + *G*(*s*)

***P*(*s*): 即 auxiliary function, *Q*(*s*): 來自 initial conditions**

**計算 *Q*(*s*) 的快速法**

參考講義 334, 335 頁

**• 分解因式的方法 (Cover up method)**



其中 *a*1, *a*2, …., *aN* 互異, 分子的 order 要小於分母的 order

則 



**(四) Laplace transform 解多個 DEs 的方法**

**方法：** DE → Laplace transform → 聯立方程式 → 消掉其他應變數，只剩一個應變數

→ 分解因式(若需要的話) → inverse Laplace transform → 解其他應變數

**範例**： 講義 381, 385 頁

**(五) 用 Fourier Series 來解 Particular Solutions**

**精神**：當 *f*(*t*) = *f*(*t* + 2*p*) 時，用 Fourier series, Furier cosine series, 或 Fouries sine series將 *f*(*t*) 表示成 ,  的 linear combination

**流程：** 見講義462-463 頁

**範例**： 講義 464 頁

**(六) Partial Differential Equations 的解法 (一)**

**用 Separation of Variables**

**精神：** 例如當 independent variables 為*x* and *y* 時，

假設 ，代入原式

使得 **PDE ODE**

**流程：** 7 個 Steps, 講義 477-479 頁 (非常重要，請熟悉)   
**注意**： (1) 其中 Steps 3, 4, 5 要分成不同的 cases 來解

(2) 經常把  表示成 

**Part 3 補充**

同學們若覺得以上的整理，還漏掉哪些公式、定義、或解法，就在這邊補充吧！