

IMAGE REGISTRATION TECHNICAL OVERVIEW

All-Pass filter Parametric Image Registration

What is Image Registration ?

目標是找出最佳空間轉換，讓 **source image** 與 **target image** 在同一座標系中對齊。

- 定義：尋找 optimal spatial transformation
- 輸入：source image、target image
- 輸出：對齊後影像與位移
- 用途：對齊、比較、追蹤變化

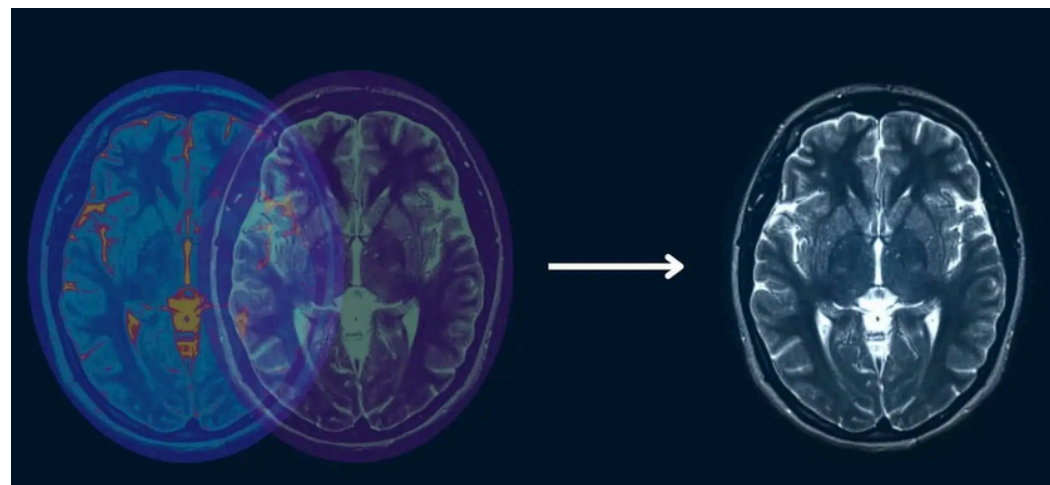


Transform



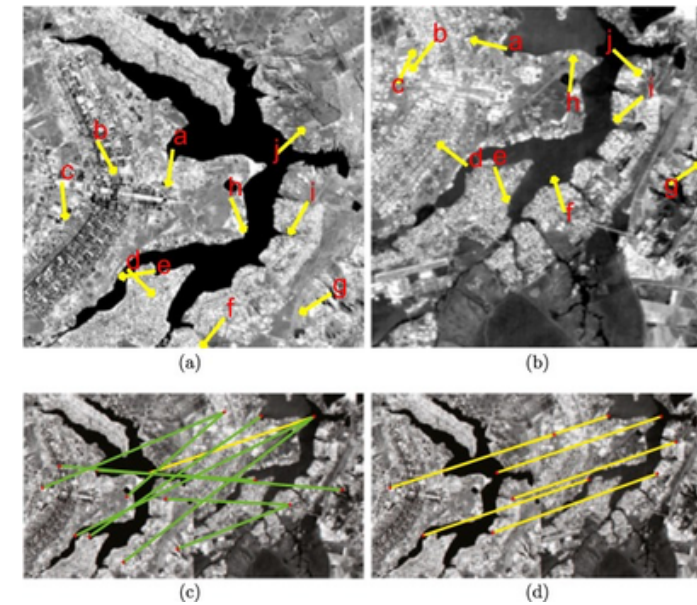
Applications

Image registration 是醫學影像、遙測與 computer vision 的基礎技術。



Medical imaging

MRI / CT 對齊，用於追蹤病灶變化與跨時間比較。



Remote sensing

比對不同月份衛星影像，分析農地、地表與環境變化。

Classical approaches

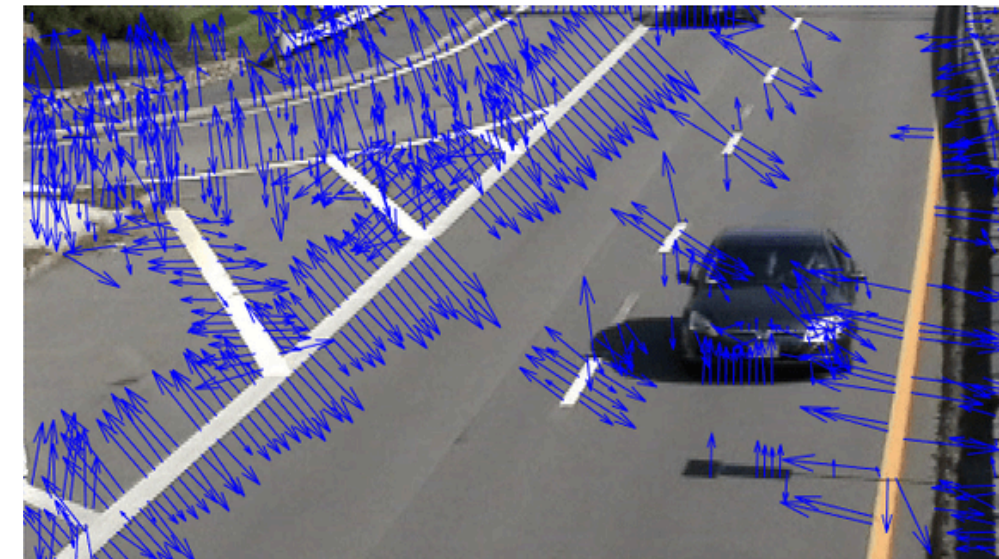
Feature-based

代表方法：SIFT (Scale-Invariant Feature Transform)



Gradient-based

代表方法：Lucas-Kanade / optical flow



Core concept of LAP

以 all-pass filter 觀點建模局部位移，將位移估計轉為濾波器係數求解問題。

1

從傳統影像位移假設

$$I_1(\mathbf{x}) = I_2(\mathbf{x} + u(\mathbf{x})) \quad \min_{p(\mathbf{x})} \{I_2(\mathbf{x}) * p(\mathbf{x}) - I_1(\mathbf{x}) * p^*(-\mathbf{x}) = 0\}$$

F.T. + pade approximation

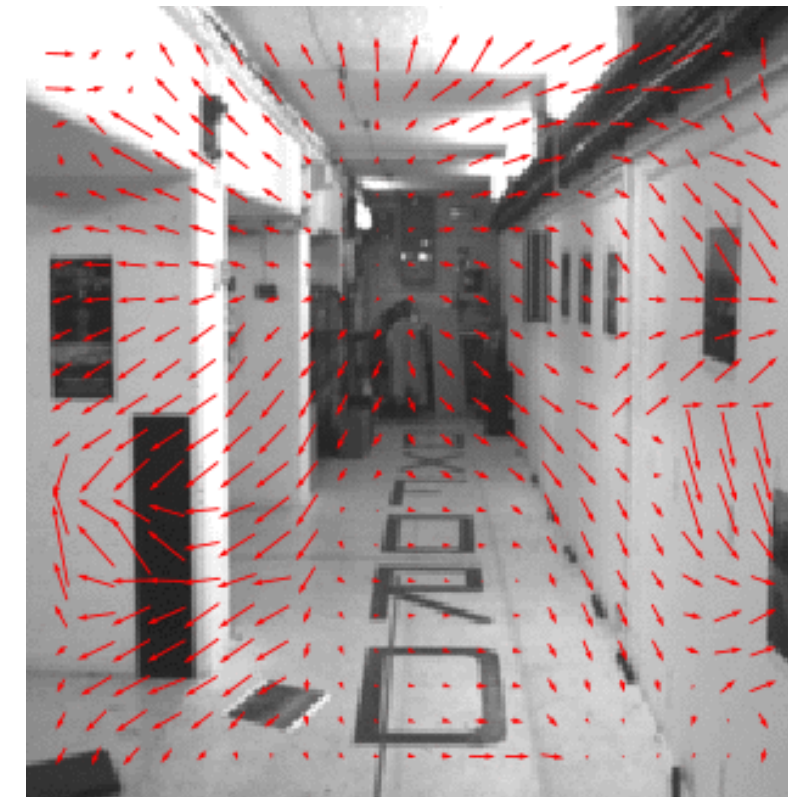
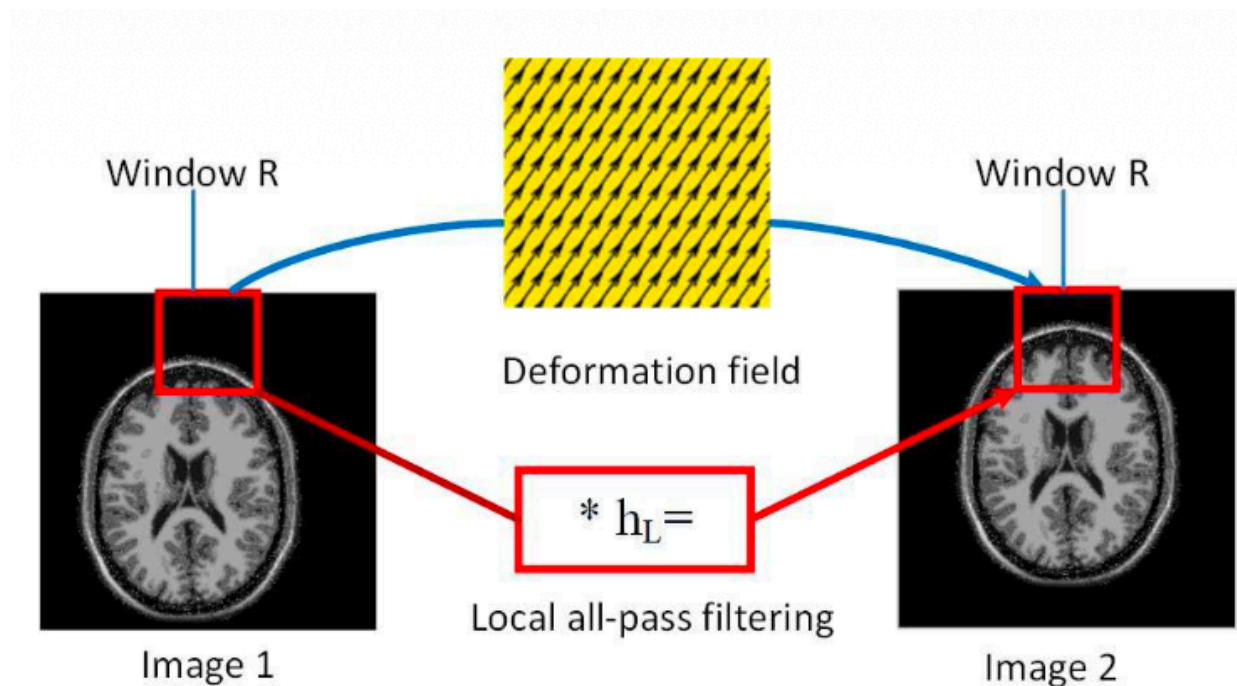
2

目標函數

3

由濾波器係數推回 $u(x)$

$$u = 2 \frac{\sum_{k,l} (k + il) p_{k,l}}{\sum_{k,l} p_{k,l}}$$



There are a few problems.....

Defect 1

FIR filter 複雜度上升

filter 尺寸增加時，未知數以 K^2 成長，求解成本快速升高。

Defect 2

逐像素位移場雜亂

每個 pixel 的 displacement vector 分散且不平滑，難以直接用於對齊。

Defect 3

brightness constancy 不成立

真實影像常有光照、模糊或模態差異，不能直接逐點比亮度。

Defect 4

大位移下線性化失真

當位移過大時，pade approximation 誤差放大，導致數值錯誤

解法一：linear combination of Gaussian basis

$$p_0(\mathbf{x}) = \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{2\sigma^2}\right) \quad p_1(\mathbf{x}) = kp_0(\mathbf{x}) \quad p_2(\mathbf{x}) = lp_0(\mathbf{x})$$

$$p(\mathbf{x}) = p_0(\mathbf{x}) + \sum_{n=1}^{n=2} c_n p_n(\mathbf{x}); \quad p(\mathbf{x}) : \text{local all pass filter}$$

如果需要更精確可以加入

$$p_3(\mathbf{x}) = (k^2 + l^2 - 2\sigma^2) \cdot p_0(\mathbf{x}) \quad p_4(\mathbf{x}) = klp_0(\mathbf{x}) \quad p_5(\mathbf{x}) = (k^2 - l^2)p_0(\mathbf{x})$$

$$p(\mathbf{x}) = p_0(\mathbf{x}) + \sum_{n=1}^{n=5} c_n p_n(\mathbf{x})$$

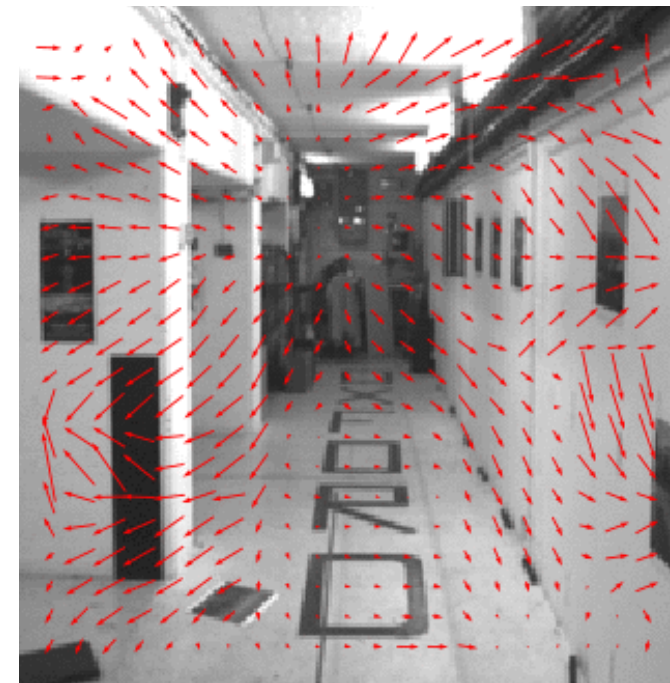
解法二：Parametric displacement field fitting

- 問題：逐像素位移場容易混雜且不穩定
- 做法：採用 parametric global fitting
- 假設：相機畸變可由二次多項式近似
- 性質：參數數量可以靈活調整，但如果參數越多也更容易擬合錯誤

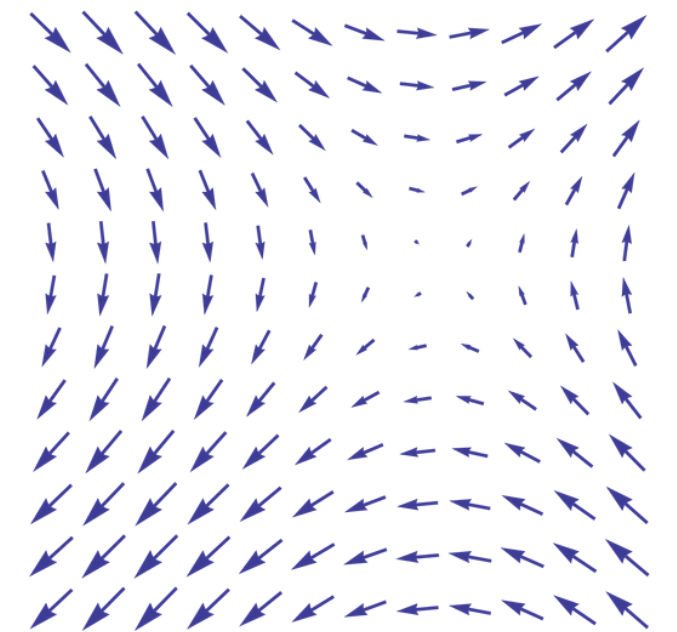
$$\min_{a_k} \sum_{x,y \in \Omega} |u(x,y) - u_{LAP}(x,y)|^2$$

$$u(x,y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5y^2 + a_6xy$$

Before



After



Fitting

解法三：brightness constancy assumption

- 原始 brightness constancy 假設不夠完備

$$I_1(x, y) = I_2(x + u_x, y + u_y)$$

- 引入 functional F ，描述 target 與 warped source 的強度關係

$$I_1(x, y) = \mathcal{F}(I_2(x + u_x, y + u_y))$$

- 將 intensity transform 建模為 basis functions 的線性組合仍可透過解線性方程組高效完成

$$\mathcal{F}\{\cdot\} = \sum_{l=1}^L \gamma_l \mathcal{F}_l\{\cdot\}$$



概念：geometry alignment 與 intensity correction 同時建模。

亮度一致性的三種關鍵場景

影像配準與對齊中，針對光學曝光、焦距模糊與跨模態成像機制的強度標準化策略與物理建模。

SCENARIO 01

Case 1: 光照與曝光差異

針對閃光燈、天氣變化或光學鏡頭暗角效應 (Vignetting)，建立兩幅影像間隨空間變化的光學強度映射關係模型：

強度對位映射模型

$$I_1(x, y) = \alpha(x, y) \cdot I_2(x + u_x, y + u_y)$$

空間光照圖擬合 (二次多項式)

$$\alpha(x, y) = b_1 + b_2x + b_3y + b_4x^2 + b_5y^2 + b_6xy$$

SCENARIO 02

Case 2: 模糊與失焦補償

動態採集或對焦不均會導致高斯模糊。為消除邊界形變，將未知變異數的高斯核展開近似為多個已知變異數基底的線性疊加，確保數值穩定性：

高斯基底疊加近似公式

$$h(x, y) \approx \sum_{n=1}^N c_n h_n(x, y)$$

註：此方法在優化空間變形參數時，不需直接估計複雜的退化函數變異數，從而避免解的發散。

SCENARIO 03

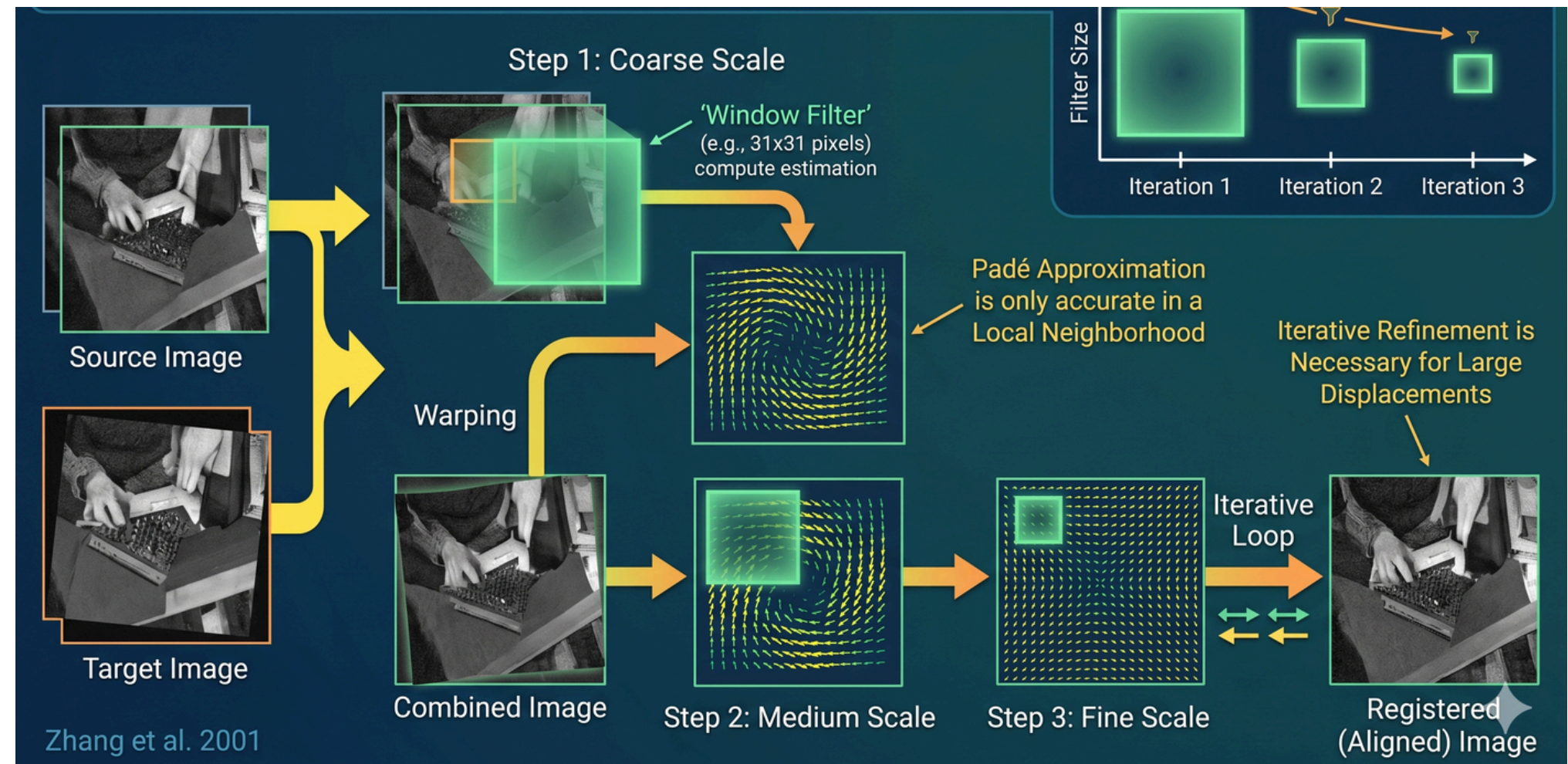
Case 3: 多模態配準強度校正

面對不同感測設備（如醫學 CT 與 MRI 影像），因為物理成像機制不同，需在建立空間幾何對齊後，採用如下強度轉換策略：

- 1. 確定性強度映射假設** 假設兩模態間存在一對一的函數關聯。
- 2. 直方圖匹配 (Histogram Matching)** 對齊亮度分佈曲線，建立精確強度轉換。
- 3. 結構與特徵融合** 消除多餘對比度干擾，達到邊緣重合。

解法四：Coarse-to-Fine structure

- 大位移時，pade approximation 誤差會放大，濾波器越大越能在大位移時縮小 approximation 的誤差
- 先用大濾波器估計粗大至上的位移，將 source image 套用 displacement field 然後再換成小濾波器求出精確的位移
- 持續迭代以達到演算法收斂



LAP 配準框架

1

intensity modeling

2

displacement field estimation

3

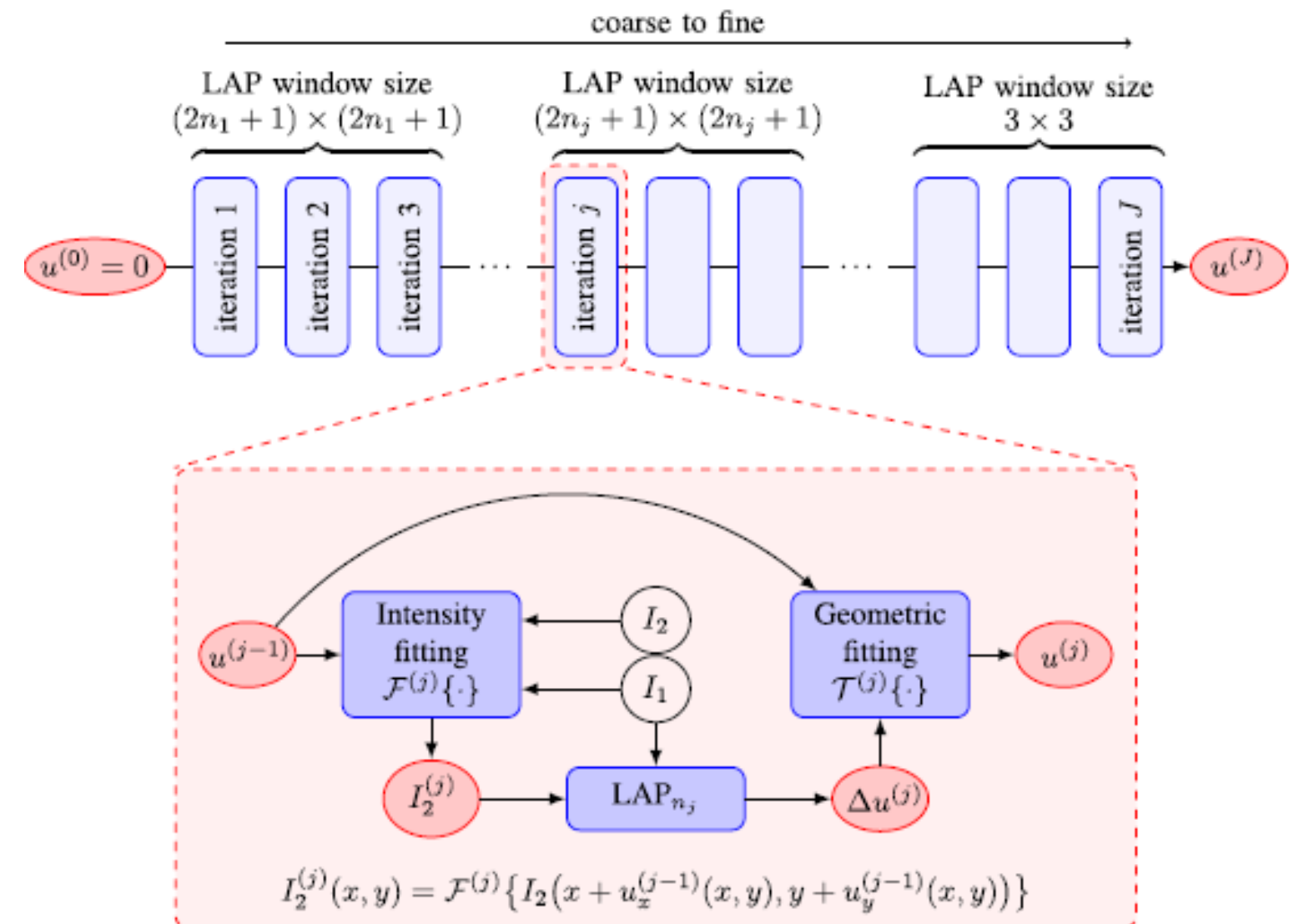
parametric global fitting

4

wrapping source image

解決的四大問題

- 複雜度
- 雜亂位移場
- 亮度不一致
- 大位移



- Lucas, B. D., & Kanade, T. (1981). An Iterative Image Registration Technique with an Application to Stereo Vision. Proceedings of the 7th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI), 674–679.
- Lowe, D. G. (2004). Distinctive Image Features from Scale-Invariant Keypoints. International Journal of Computer Vision, 60(2), 91–110.
- C. Gilliam and T. Blu, "Local All-Pass Geometric Deformations," IEEE Trans. Image Process., vol. 27, no. 2, pp. 1010-1025, Feb. 2018, doi: 10.1109/TIP.2017.2765822.
- X. Zhang, C. Gilliam, and T. Blu, "All-Pass Parametric Image Registration," IEEE Trans. Image Process., vol. 29, pp. 5625-5640, 2020, doi: 10.1109/TIP.2020.2984897.