Part 1 公式與定義總整理

(1) Fourier Series

把握不同 transform 之間的「關聯性」，多比較彼此之間相同或相異的地方

(1) Fourier series (standard form)	interval: $x \in [-p, p]$ $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{p}x+b_n\sin\frac{n\pi}{p}x\right)$, $a_0=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)dx$, $a_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)\cos\frac{n\pi}{p}xdx$, $b_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)\sin\frac{n\pi}{p}xdx$, a_0, a_n, b_n: Fourier coefficients
(1-1) Fourier series (half range extension form)	interval: $x \in [0, L]$ 將 Fourier series 的 p 變成 $L/2$ $\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}$ 變成 $\frac{2}{L}\int_{0}^{L}$
(2) Fourier cosine series (cosine series)	$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{p}x$ $a_0=\frac{2}{p}\int_{0}^{p}f(x)dx$, $a_n=\frac{2}{p}\int_{0}^{p}f(x)\cos\frac{n\pi}{p}xdx$ 適用情形： (1) interval: $x \in [-p, p]$, $f(x)=f(-x)$ (2) interval: $x \in [0, p]$ (half range extension 時，將 p 變成 L)
(3) Fourier sine series (sine series)	$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{p}x$ $b_n=\frac{2}{p}\int_{0}^{p}f(x)\sin\frac{n\pi}{p}xdx$ 適用情形： (1) interval: $x \in [-p, p]$, $f(x)=-f(-x)$ (2) interval: $x \in [0, p]$ (half range extension 時，將 p 變成 L)

(2) Cauchy-Euler 的相關公式與定義

Cauchy-Euler Equation	$a_n x^n y^{(n)}(x)+a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)}(x)+\cdots+a_1 xy'(x)+a_0 y=g(x)$
Auxiliary of Cauchy-Euler	$a_n m(m-1)(m-2)\cdots\cdots(m-n+1)+$ $a_{n-1}m(m-1)(m-2)\cdots\cdots(m-n+2)+$ $a_{n-2}m(m-1)(m-2)\cdots\cdots(m-n+3)+\cdots\cdots+a_1 m+a_0=0$
Linearly Independent Solutions of Cauchy-Euler Equations	
No repeated root at m_0	x^{m_0}
k repeated roots at m_0	x^{m_0} , $x^{m_0}\ln x$, $x^{m_0}(\ln x)^2$, $\cdots\cdots$, $x^{m_0}(\ln x)^{k-1}$
Complex roots $\alpha\pm j\beta$	$x^{\alpha}\cos(\beta\ln x)$, $x^{\alpha}\sin(\beta\ln x)$
k repeated roots at $\alpha\pm j\beta$	$x^{\alpha}\cos(\beta\ln x)$, $x^{\alpha}\cos(\beta\ln x)\ln x$, $x^{\alpha}\cos(\beta\ln x)(\ln x)^2$, $\cdots\cdots$, $x^{\alpha}\cos(\beta\ln x)(\ln x)^{k-1}$ $x^{\alpha}\sin(\beta\ln x)$, $x^{\alpha}\sin(\beta\ln x)\ln x$, $x^{\alpha}\sin(\beta\ln x)(\ln x)^2$, $\cdots\cdots$, $x^{\alpha}\sin(\beta\ln x)(\ln x)^{k-1}$

(3) Chapter 6 的相關公式與定義

(i) ordinary point; (ii) regular singular point; (iii) irregular singular point	先將 DE 變成 <u>standard form</u>： $y^{(n)}+P_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots\cdots+P_1(x)y'+P_0(x)y=0$ (i) 若 $P_0(x), P_1(x), \ldots. P_{n-1}(x)$, 在 $x=x_0$ 這一點為 analytic, 則 x_0 為 **<u>ordinary point</u>** (ii) 若 $P_0(x), P_1(x), \ldots. P_{n-1}(x)$, 在 $x=x_0$ 不為 analytic, 但 $(x-x_0)^n P_0(x), (x-x_0)^{n-1}P_1(x), \ldots\ldots (x-x_0)P_{n-1}(x)$ 在 $x=x_0$ 為 analytic, 則 x_0 為 **<u>regular singular point</u>** (iii) 以上二條件皆不滿足，則 x_0 為 **<u>irregular singular point</u>**
regular singular point 的情形下， $r_2-r_1=$ **integer** 時，有時(並非所有情況) 要用這個式子求 $y_2(x)$	$y_2(x)=y_1(x)\int\frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)}dx$

(4) **Chapter 11 的相關公式與定義**

inner product	$(f_1, f_2)=\int_a^b f_1(x) f_2^*(x)\,dx$ *: conjugate
orthogonal	$(f_1, f_2)=\int_a^b f_1(x) f_2^*(x)\,dx = 0$
square norm	$\left\|f(x)\right\|^2=\left(f(x), f(x)\right)=\int_a^b f(x) f^*(x)\,dx=\int_a^b \left\|f(x)\right\|^2 dx$
norm	$\left\|f(x)\right\|=\sqrt{\left(f(x), f(x)\right)}=\sqrt{\int_a^b f(x) f^*(x)\,dx}=\sqrt{\int_a^b \left\|f(x)\right\|^2 dx}$
normalize	$\psi(x) \longrightarrow v(x)=\dfrac{\psi(x)}{\left\|\psi(x)\right\|}$ 註：$\left\|v(x)\right\|=1$
orthogonal set	$(\phi_m(x), \phi_n(x))=0$ for $m \neq n$, no constraint for $(\phi_n(x), \phi_n(x))$
orthonormal set	$(\phi_m(x), \phi_n(x))=0$ for $m \neq n$, $(\phi_n(x), \phi_n(x))=1$
orthogonal series expansion	$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(x)$ where $c_n=\dfrac{(f(x), \phi_n(x))}{(\phi_n(x), \phi_n(x))}$ ← inner products
inner product with weight function	$(f_1, f_2)=\int_a^b f_1(x) f_2^*(x) w(x)\,dx$
orthogonal with respect to a weight function	$(f_1, f_2)=\int_a^b f_1(x) f_2^*(x) w(x)\,dx = 0$ 其他 norm, square norm, orthogonal series expansion 的定義在考慮 weight function 時，都是將 $\int_a^b f_1(x) f_2^*(x)\,dx$ 改為 $\int_a^b w(x) f_1(x) f_2^*(x)\,dx$
even and odd	If $f(x)$ is even, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ If $f(x)$ is odd, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

(5) Chapter 12 的相關公式與定義

hyperbolic	for $A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=0$ $B^2-4AC>0$
elliptic	同上，但 $B^2-4AC<0$
parabolic	同上，但 $B^2-4AC=0$
wave equation	$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$
Laplace's equation	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$
Dirichlet condition	$u=$ ……..
Neumann condition	$\frac{\partial u}{\partial n}=\cdots\cdots$
$X''(x)+\lambda X(x)=0$ $X(0)=0 \quad X(L)=0$	解： $X(x)=c_2\sin\frac{n\pi}{L}x$, $\lambda=\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ $n=1, 2, 3, \ldots\ldots$

(6) 其他重要公式

Taylor series for $f(x)$	$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(x-x_0)^m}{m!}f^{(m)}(x_0)$
Taylor series for $\exp(x)$	$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!}$
Taylor series for $\cos(x)$	$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m}$
Taylor series for $\sin(x)$	$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1}$
Taylor series for $\ln(1+x)$	$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots\cdots$
$\int uv'$	$\int uv' = uv - \int u'v$
$\cos(a+b) =$	$\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
$\sin(a+b) =$	$\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
$\cos(a)\cos(b) =$	$[\cos(a+b) + \cos(a-b)]/2$
$\sin(a)\sin(b) =$	$[-\cos(a+b) + \cos(a-b)]/2$
$\sin(a)\cos(b) =$	$[\sin(a+b) + \sin(a-b)]/2$
$\cos(2a) =$	$\cos^2(a) - \sin^2(a)$ or $1 - 2\sin^2(a)$ or $2\cos^2(a) - 1$
$\sin(2a) =$	$2\sin a \cos a$
$\cosh x =$	$\frac{e^x + e^{-x}}{2}$
$\sinh x =$	$\frac{e^x - e^{-x}}{2}$
$\sinh(0) =$	0
$\cosh(0) =$	1
$\left.\frac{d}{dx}\cosh x\right\|_{x=0} =$	0

公式雖然多，但是把握彼此之間的關係，注意相同或相異之處，就可以較容易的記起來

Part 2 「解法」總整理

(一) 使用 Variation of Parameters 的方法求 Particular Solutions

流程： **Page 236 (2nd order) and Page 243 (Higher order)**

(Step 1) Standard Form $y^{(n)}(x)+\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)}y^{(n-1)}(x)+\cdots+\frac{a_1(x)}{a_n(x)}y'(x)+\frac{a_0(x)}{a_n(x)}y=\frac{g(x)}{a_n(x)}$

(Step 2) Calculate W, W_1, W_2, …., W_n (see page 244)

(Step 3) $u_1'=\frac{W_1}{W}$, $u_2'=\frac{W_2}{W}$, ….., $u_n'=\frac{W_n}{W}$

(Step 4) $u_1=\int u_1'(x)dx$, $u_2=\int u_2'(x)dx$, ….., $u_n=\int u_n'(x)dx$

(Step 5) $y_p(x)=u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x)+\cdots\cdots+u_n(x)y_n(x)$

(二) Nonhomogeneous Cauchy-Euler Equations 的解

方法 1: 使用 **variation of parameters**

範例： Page 263

方法 2: (Step 1): Set $x = e^t$, (use t instead of x as the independent variable)

(Step 2): Determine the auxiliary function, then replace m by D_t

(Step 3): Solve the DE

(Step 4): Set $t = \ln x$

範例： Pages 265, 266

(三) n^{th} order linear DE 的 series solutions 解法

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$$

$a_k(x)$ $(k=0, 1, \ldots, n)$ 必需為多項式，若不是，要先用 Taylor series 展開

(Case 1) 條件：當 x_0 為 ordinary point 時

方法： 假設 $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$ ，代入原式

流程： 5 個 steps, 參考講義 page 279

(Case 2) 條件：當 x_0 為 regular singular point 時

方法： 假設 $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^{n+r}$ ，代入原式 (即 Frobenius Method)

流程： 7 個 steps, 參考講義 pages 300-301

- **Case 2 的特殊情形：**

當 $r_1 \neq r_2$ and r_1, r_2 are real, $\boldsymbol{r_2 - r_1 =}$ **integer**

「有的時候」用講義 page 300 的方法只能得出一個 independent solution $y_1(x)$

必需根據 $y_2(x)=y_1(x)\int\frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)}dx$ 和長除法解出第二個 independent solution

範例： 見講義 pages 310-311

(四) 用 Fourier Series 來解 Particular Solutions

精神：當 $f(t)=f(t+2p)$ 時，用 Fourier series, Furier cosine series, 或 Fouries sine series 將 $f(t)$ 表示成 1, $\cos\left(\frac{n\pi}{p}t\right)$, $\sin\left(\frac{n\pi}{p}t\right)$ 的 linear combination

流程： 見講義 pages 407, 408

範例： 見講義 pages 409-412

(五) Partial Differential Equations 用 Separation of Variables 的解法

精神： 例如當 independent variables 為 x and y 時，

假設 $u(x,y)=X(x)Y(y)$，代入原式

使得 **PDE** ⟶ **ODE**

流程： 7 個 Steps, 講義 pages 422-424 (非常重要，請熟悉)

注意： (1) 其中 Steps 3, 4, 5 要分成不同的 cases 來解

(2) 要將 Steps 3, 4, 5 所有的解都加起來 (Step 6)
(尤其是處理 boundary value problems 時)

(3) 經常把 $d_1e^{2\alpha x}+d_2e^{-2\alpha x}$ 表示成 $c_4\cosh(2\alpha x)+c_5\sinh(2\alpha x)$

(4) "等於零" 的 IVP 或 BVP 先於 Steps 3, 4 處理

例如， $u(L,y)=0 \to X(L)=0$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=b}=0 \quad \to Y'(b)=0.$$

"不等於零" 的 IVP 或 BVP，要在 Step 7 當中處理

(5) 其他需注意的地方：整理於講義 pages 453-456

Part 3 補充

同學們若覺得以上的整理，還漏掉哪些公式、定義、或解法，就在這邊補充吧！