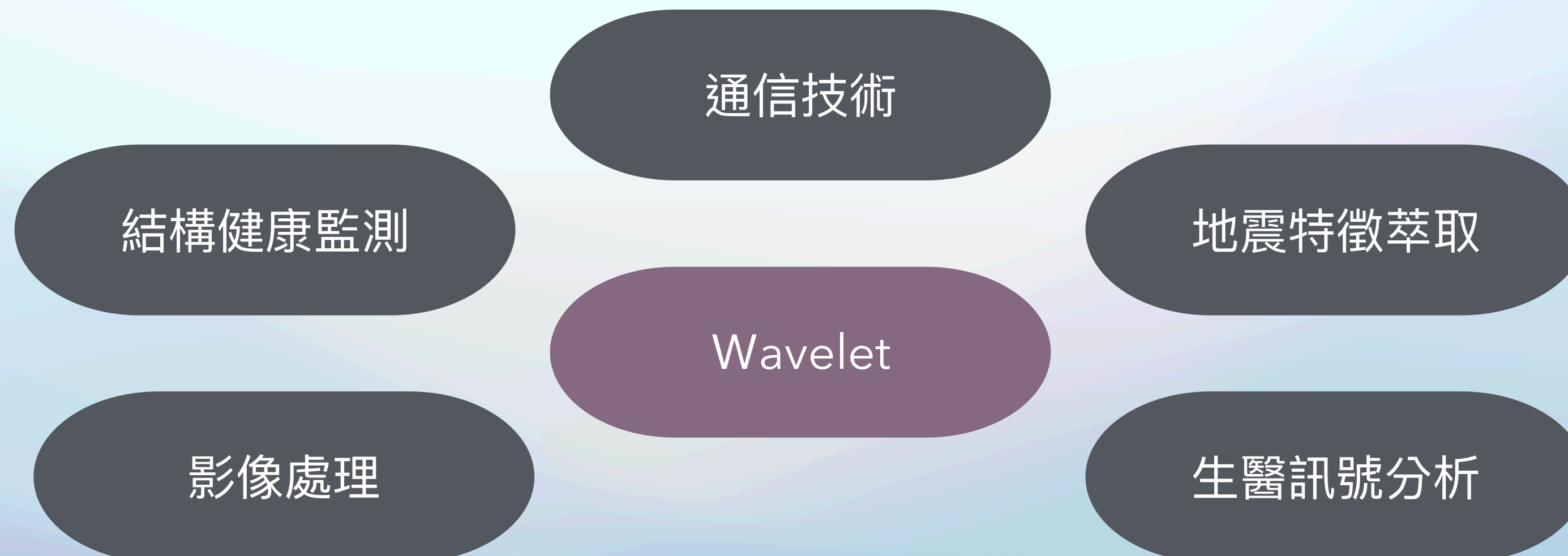


# Applications of Wavelet Transforms

# Abstract

- 本報告的主題是介紹Wavelet Transforms的應用。Wavelet Transforms 在訊號與影像分析中具有獨特的地位，因為它們同時提供時間與頻率的局部化資訊，能有效應對非平穩、具多尺度特徵的數據。
- 從 Wavelet 的基本概念出發，進而探討各種實務應用，包括影像處理(如降雜、壓縮、邊緣偵測)、地震特徵萃取、生醫訊號分析、結構健康監測以及通信技術。藉此了解對 Wavelet 在不同領域的多元應用。



# 報告大綱

1. Wavelet Transforms 的理論基礎，包括 Continuous Wavelet Transform (CWT) 與 Discrete Wavelet Transform (DWT) 的差異
2. 探討 Wavelet 在影像處理上的主要應用，包括降雜、壓縮與邊緣偵測。
3. 探討Wavelet在生醫訊號分析、地震分析、通訊系統設計等領域的應用。
4. 未來發展與結論。

# Wavelet 介紹

- Wavelet Transforms 是因應 Fourier Transforms 的侷限而發展出來的工具。Fourier 雖然能提供完整的頻率資訊，但無法呈現這些頻率何時出現。
- 相較之下，Wavelet 使用具有有限域支撐的母小波(Mother Wavelet)函數，透過縮放(scale)與平移(translation)生成一組完備基底，使得訊號能在不同時間尺度中被仔細檢視。
- Wavelet **適合分析非平穩訊號**，在高頻區段，Wavelet 使用較短的分析小波，提供優秀的時間解析度，可以精準捕捉短暫出現的高頻事件（如突發性的尖峰信號）；在低頻區段則使用較長的分析小波，使得頻率解析度提高。這種時頻分析特徵使 Wavelet 能應用於音訊、影像、醫學信號等領域。

# Wavelet 理論基礎

- Wavelet Transforms 的基礎在於 Mother Wavelet 函數  $\psi(t)$ ，藉由縮放因子  $a$  與平移因子  $b$  可以得到一族子母小波  $\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ 。

- CWT 提供連續時間尺度下的分析, CWT:  $CWT_f(a, b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$

- DWT，以濾波器組 (Filter Bank) 將訊號分為 approximation 與 detail 係數。 DWT:

$$f(t) = \sum_k c_{J,k} \phi_{J,k}(t) + \sum_{j=J}^1 \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(t)$$

- 其中  $\phi_{J,k}(t)$  為尺度函數 (Scaling Function)， $c_{J,k}$  為 approximation 係數， $d_{j,k}$  為 detail 係數

# Wavelet 關鍵特性

- 時間-頻率局部化(Time-Frequency Localization)，方便找出訊號中何時出現某種頻率特徵
- 多重尺度(Multiscale)分析使分析者同時擁有鳥瞰全局及放大局部細節的能力。
- 具有正交性(Orthogonality)或雙正交性(Biorthogonality)，確保分解與重建無資訊流失。
- 擁有  $N$  個「Vanishing Moments」的小波  $\psi(t)$  具有以下性質：
$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n \psi(t) dt = 0 \quad \text{for } n = 0, 1, \dots, N - 1.$$
- Vanishing Moments的存在則能使 Wavelet 適合捕捉訊號中的尖銳轉變或平滑區塊。小波具備的 vanishing moments 數量越多，表示該小波對低階多項式的敏感度越低，也就是能忽略低階多項式成分的改變，更能專注於捕捉訊號中的突變、邊緣特徵。

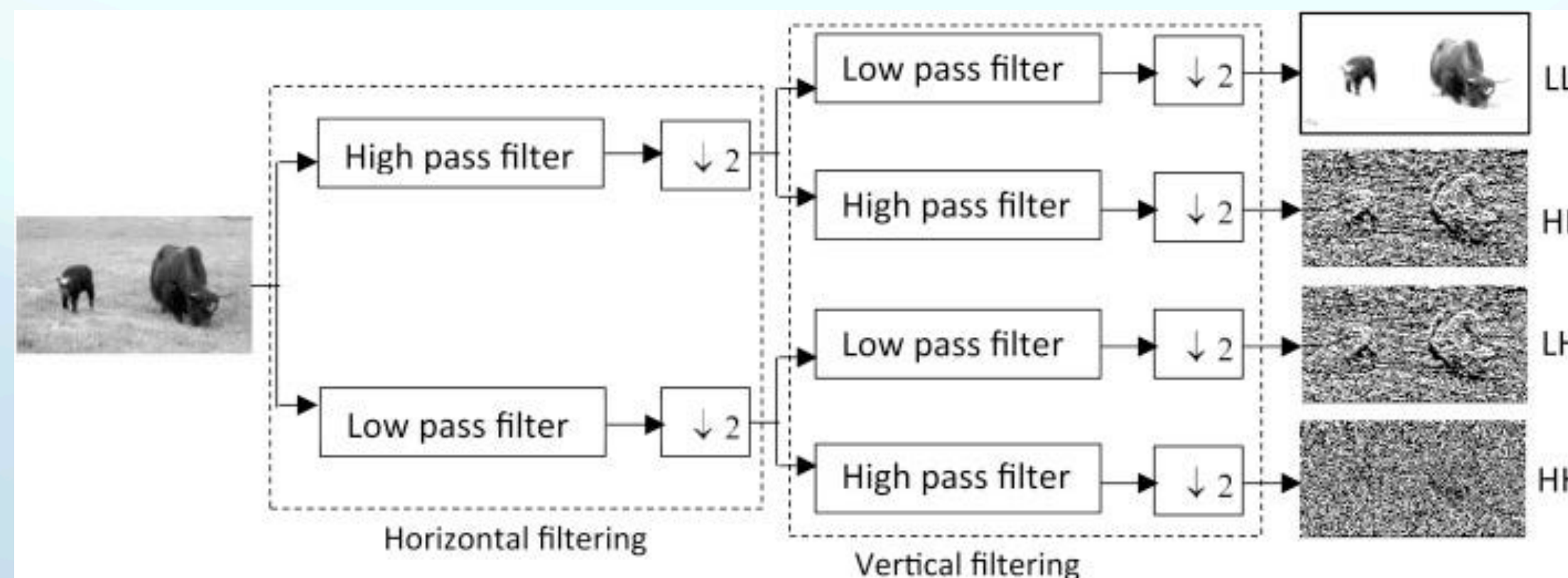
# Wavelet 與 Fourier 比較

- STFT  $f(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t - \tau)e^{-i\omega t} dt$
- Fourier Transform 的基底是由無限延伸的正弦、餘弦組合而成，適用穩態訊號；但對具突發事件的非平穩訊號則無法得知特定頻率何時出現。
- STFT(Short-Time Fourier Transform) 雖引入時窗，但仍受固定窗大小限制。
- Wavelet Transform的基底是小波函數 (wavelet functions) ，通常具有局部化特性，且並非單純正弦函數。
- Wavelet Transform不需要像 STFT 一樣預設固定視窗長度，它能根據頻率改變時窗大小。在高頻處接近短時窗分析、在低頻處接近長時窗分析。如此可根據訊號特性動態調整分析尺度，這使 Wavelet 對突變、邊緣、非平穩結構的訊號分析更加有效。

# 2D DWT 基本原理與影像分解

- 2D DWT 是透過對影像在水平方向和垂直方向各自進行小波分解而實現。對一張影像  $I(x,y)$  施行 DWT 後，會得到四個子頻帶：

$$I(x, y) \xrightarrow{\text{DWT}_x} \{Ax(x, y), Dx(x, y)\} \xrightarrow{\text{DWT}_y} \begin{cases} LL(x, y) = \text{DWT}_y(Ax(x, y)) \text{ 的近似部分} \\ LH(x, y) = \text{DWT}_y(Ax(x, y)) \text{ 的細節部分} \\ HL(x, y) = \text{DWT}_y(Dx(x, y)) \text{ 的近似部分} \\ HH(x, y) = \text{DWT}_y(Dx(x, y)) \text{ 的細節部分} \end{cases}$$





# 2D DWT 在影像應用範例

## 1. 影像降雜 (Image Denoising) :

利用 2D DWT 可將雜訊(常集中於高頻子頻帶)與主要影像結構分離。針對高頻子頻帶(LH、HL、HH)進行閾值化(Thresholding)，移除小幅度的雜訊係數，再透過逆小波變換(IDWT)重建影像，即可有效降低雜訊，保留原有邊緣與主要特徵。

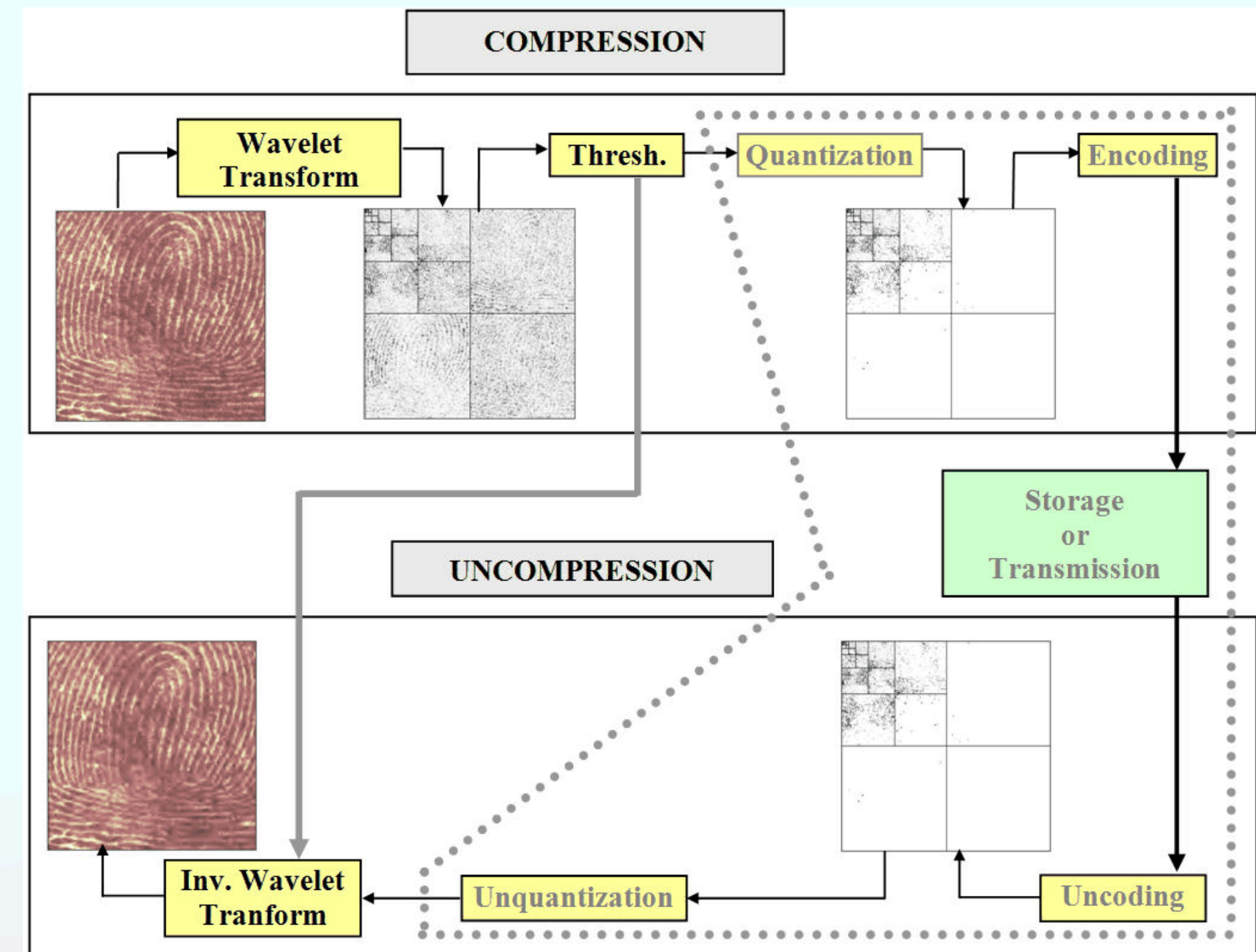
## 2. 特徵萃取與邊緣偵測 (Feature Extraction & Edge Detection) :

2D DWT 的高頻子頻帶(LH、HL、HH)容易凸顯邊緣、角點與紋理特徵。分析這些子頻帶可萃取出具辨識力的特徵向量，用於人臉識別、紋理分類、目標偵測、影像分析等領域。

# 2D DWT 在影像應用範例

## 3. 影像壓縮

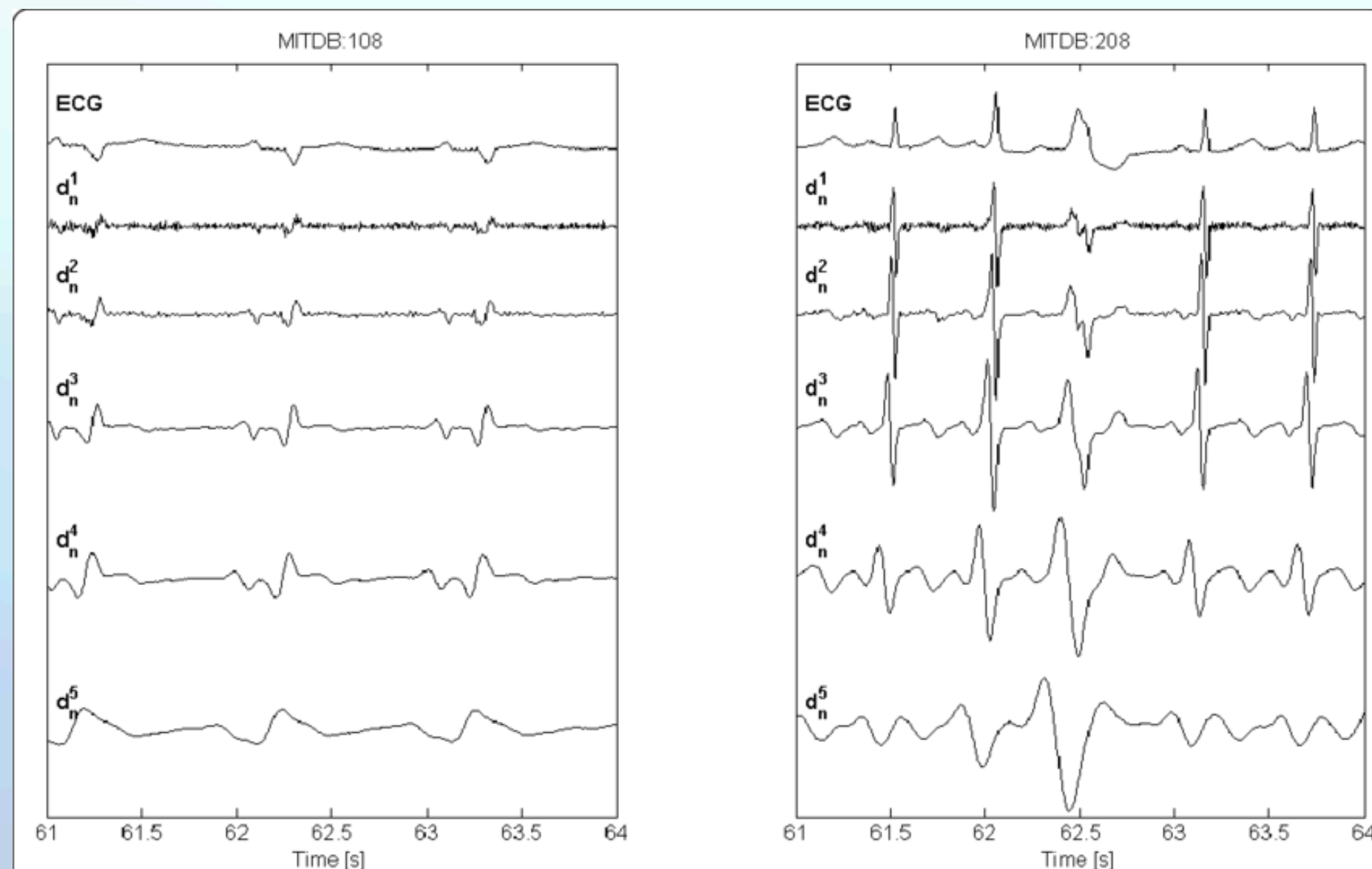
JPEG2000 標準即採用 DWT 取代 DCT。2D DWT 將影像能量集中在 LL 子頻帶中，而高頻子頻帶則包含較少重要的細節，適合量化與編碼。透過量化和編碼，可達到高壓縮比，同時保有較佳的影像特徵。



圖片來源：<https://www.mathworks.com/help/wavelet/ug/wavelet-compression-for-images.html>

# 1D DWT 在生醫訊號的應用

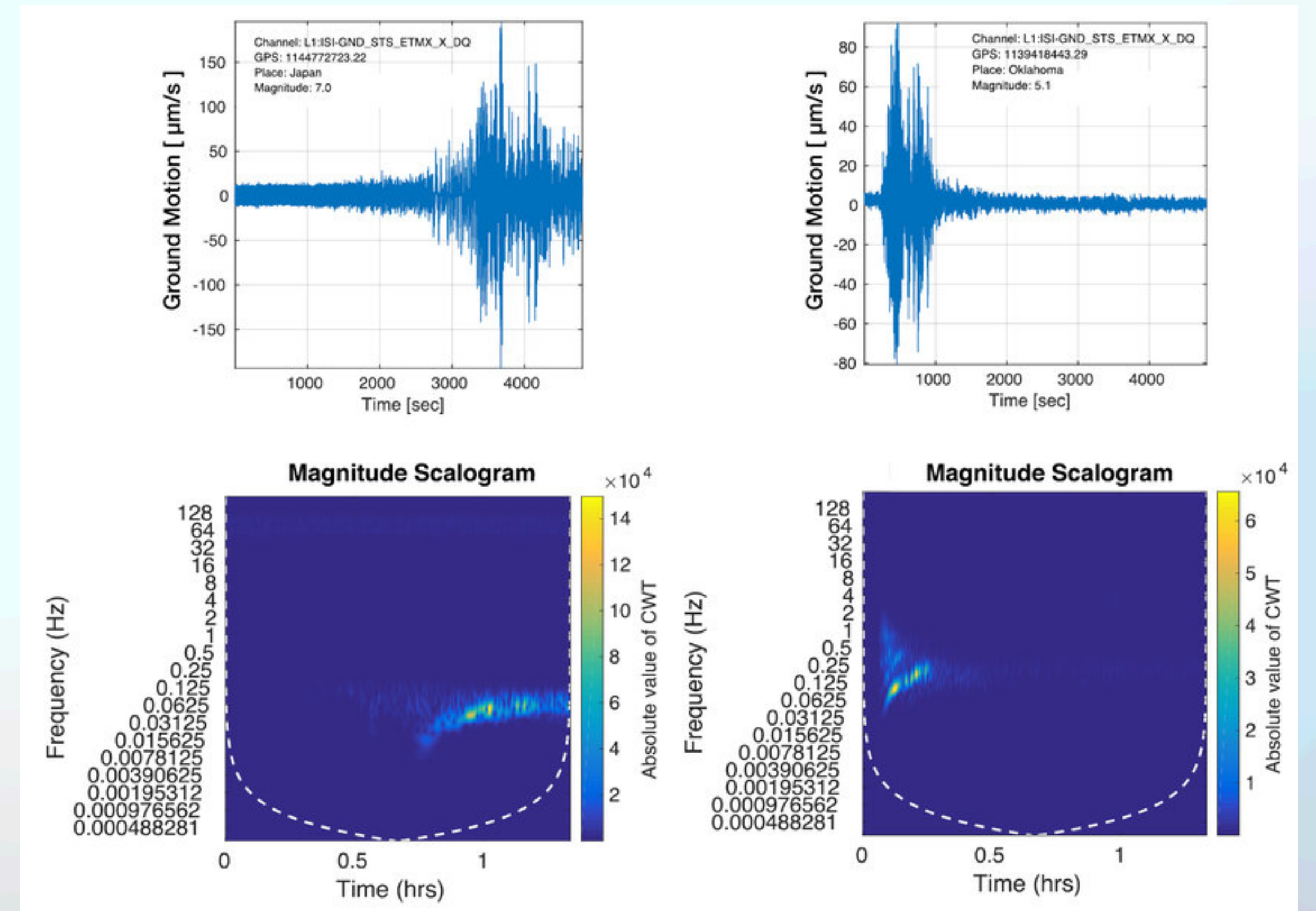
- 生醫訊號常受到電極雜訊、肌電干擾等影響。以 ECG (心電圖) 為例，透過 DWT 將 ECG 分解，低頻部分保留心臟跳動的主要結構(QRS complex)，高頻子頻帶則可能含有雜訊。透過適當的閾值處理高頻係數並重建，即可濾除雜訊而不損及 ECG 的關鍵特徵，將背景雜訊與腦電事件分離，增加臨床診斷的準確性。



圖片來源：[https://www.researchgate.net/figure/ECG-signal-and-DWT-decomposition-Examples-of-ECG-signals-from-MITDB-records-resampled\\_fig11\\_50986614](https://www.researchgate.net/figure/ECG-signal-and-DWT-decomposition-Examples-of-ECG-signals-from-MITDB-records-resampled_fig11_50986614)

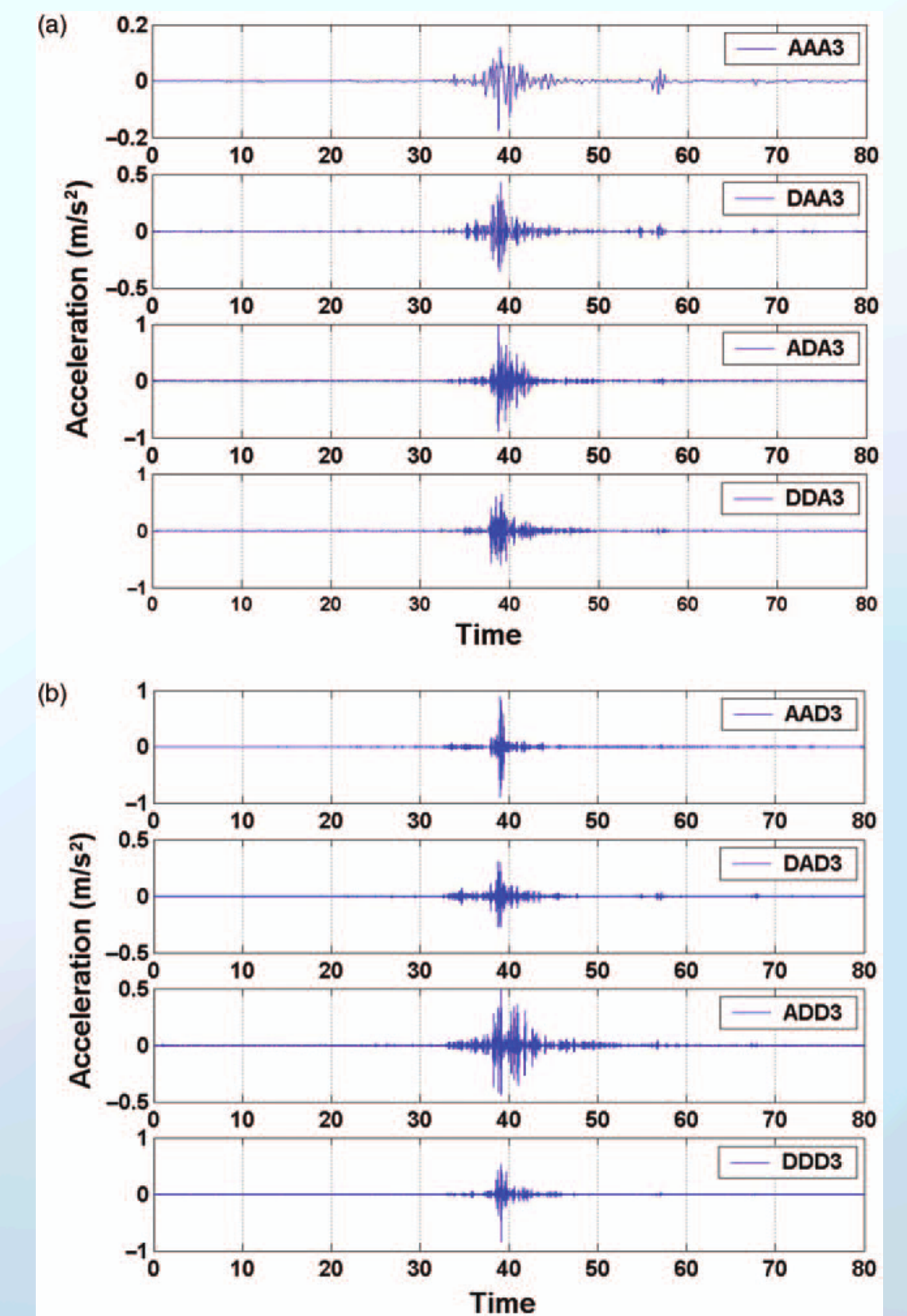
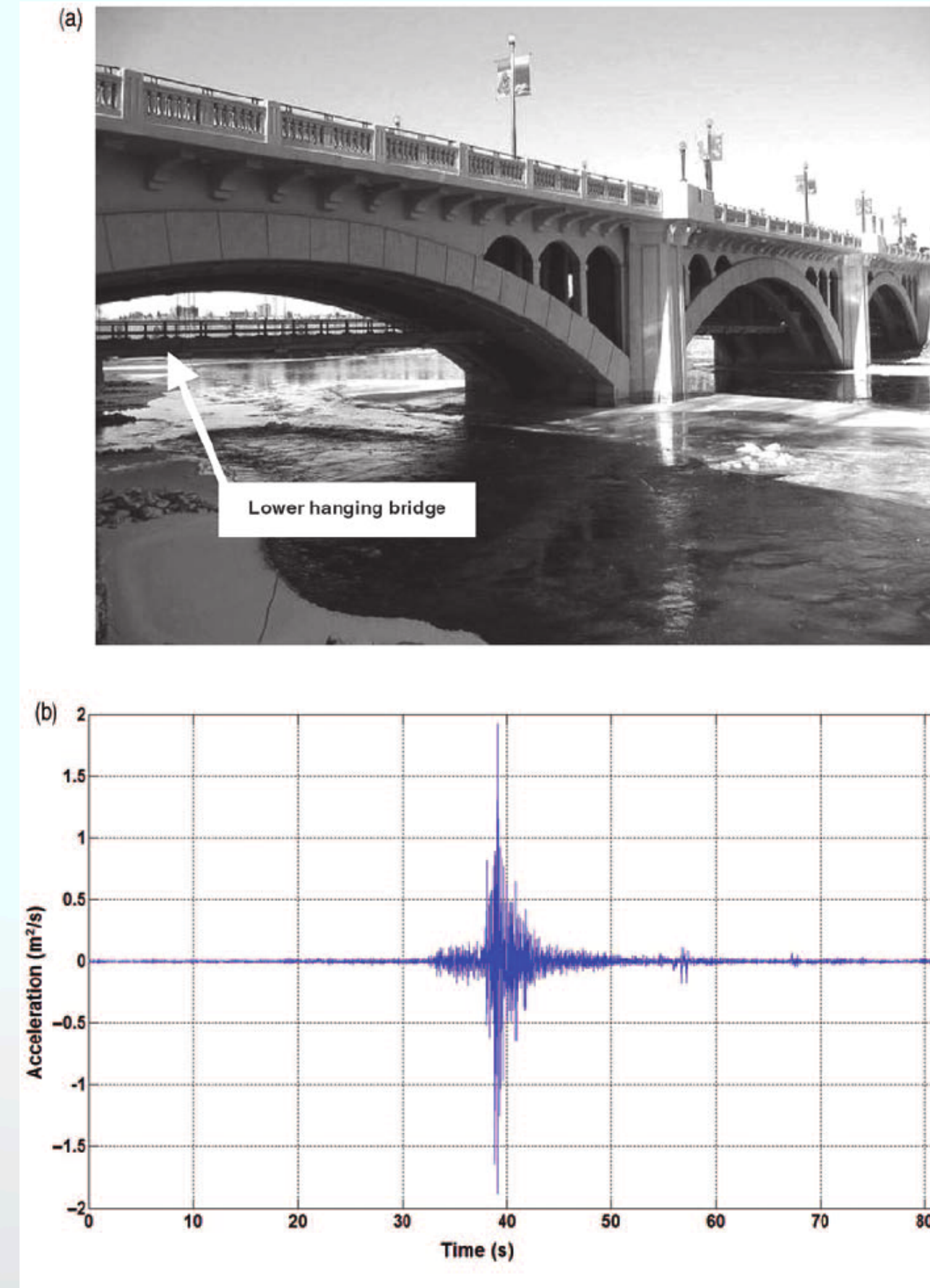
# CWT在地震波分析的應用

- 地震信號往往是非平穩的，具有在不同時間出現不同頻率成分的特徵。例如，地震初期可能有高頻小振幅的前震訊號，中期主震波段以中頻率能量較強，後期衰減則在更低頻範圍顯示基盤晃動餘波。透過 CWT 的時間-頻率表示（即下方圖中所示的「Magnitude Scalogram」），可以觀察到：
  1. 能量分布隨時間與頻率的變化：某段時間若出現特定頻帶能量峰值，即代表該時刻信號在該頻率範圍內具有強烈活動，如主要震波抵達時間或餘震事件。
  2. 識別不同波種或事件特徵：P 波、S 波或面波可能分佈在不同的頻率範圍中。CWT 可輕易將其在時間與頻率軸上區分，協助地震學家從混雜的原始訊號中辨認各波種到達時刻與強度。
  3. 非平穩訊號處理：相對於 Fourier Transform 的固定頻率基底，CWT 可適應地震信號在時間上快速變化的特性



# 結構健康監測 (SHIM)

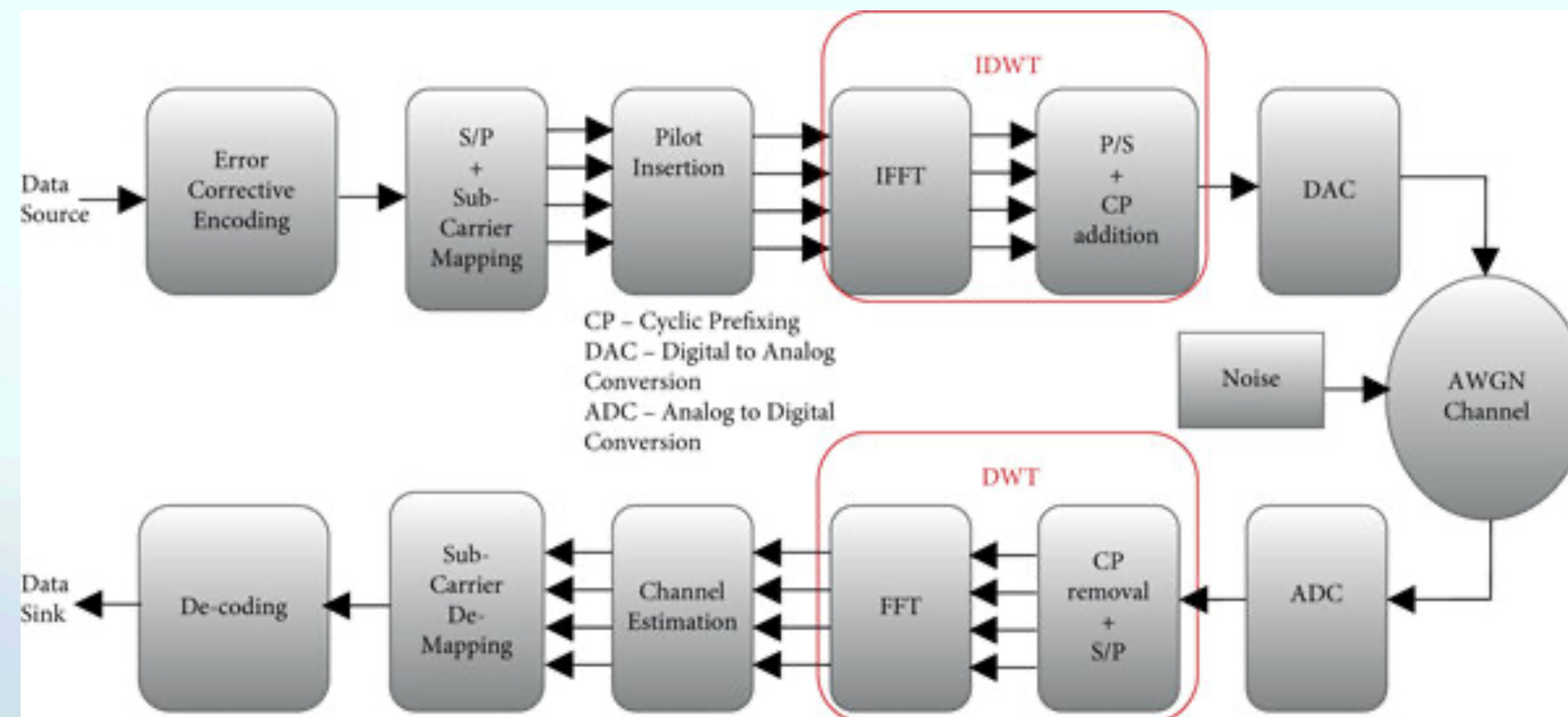
- 在橋梁、建築物、機翼等結構健康監測中，Wavelet 為工程師提供一種非破壞性的診斷方式。透過在日常營運期間收集結構的振動訊號並以 Wavelet 分解，若某一階段出現異常高頻能量峰值，即可能預示微裂縫或材料疲勞。



圖片來源[https://www.researchgate.net/figure/Wavelet-packet-decomposed-structural-dynamic-signal-using-Daubechies-mother-wavelet\\_fig7\\_245382011](https://www.researchgate.net/figure/Wavelet-packet-decomposed-structural-dynamic-signal-using-Daubechies-mother-wavelet_fig7_245382011)

# 電信領域

- 在電信領域，Orthogonal Frequency Division Multiplexing (OFDM) 是常用的多載波調變技術，用以提高載波的頻譜利用率。傳統 OFDM 使用 Fourier 基底，但 Wavelet-based OFDM 同時在時域與頻域中局部化的特性，可在多路徑傳輸環境中表現更佳的抗干擾能力，也使得頻譜利用更有效率。



# Wavelet 與其他方法比較

特性/方法	Fourier Transform (FT)	STFT (Short-Time Fourier)	Wavelet Transform (WT)	Curvelet Transform	Shearlet Transform
(Time Localization)	無 (純頻域)	有，但時間與頻率解析度受固定視窗限制	有，時間頻率局部化且多尺度	有，具多尺度但偏向方向性分析於連續領域	有，時間-空間-尺度局部化且可解析方向
(Frequency Localization)	完整頻率解析度無時間資訊	可同時觀察時間與頻率但解析度較差	頻率(或尺度)局部化，解析度隨尺度變動	擅長捕捉多尺度特徵，特別適用於曲線奇異性	擅長捕捉多尺度特徵與各種方向奇異性
(Scale/Window)	無固定窗，整體頻率分析	固定窗大小，需在時間與頻率間權衡	多尺度分析，隨頻率調整時間窗大小	多尺度分析，可變方向數目與尺度	多尺度分析，方向分解更彈性
(Directionality)	無方向性分解	無特別方向性 (以正交頻帶分解)	基本上無明顯方向性 (正交或小波樹狀結構)	有方向性設計，特別針對曲線奇異邊界	高度方向性，可解析不同方位的特徵
適用的信號特徵	平滑整體信號	一般非平穩信號，但能力有限	非平穩信號，適用邊緣/突發事件檢測	適合含曲線邊緣的2D信號(影像)	適合具任意方向邊緣特徵的2D/3D資料
(Computational Complexity)	取決於 FFT 高效實現，通常 $O(N \log N)$	與 FT 類似，但需重複對窗後信號FFT，較高	一般為 $O(N) \sim O(N \log N)$ 取決小波基實作	較原始WT複雜，需更多方向分解 (通常 $O(N \log N)$ )	與Curvelet相似或更複雜(多方向、多尺度)
傳統應用場景	頻域分析、穩態訊號	簡單非平穩訊號分析、音訊處理	圖像降雜、壓縮、特徵萃取、醫學訊號	自然影像/邊緣偵測、影像壓縮與去雜訊	具方向性紋理分析、高階影像/視訊處理

# 結論與未來發展方向

- 透過 Wavelet 分解，訊號或影像的能量與資訊得以以稀疏、局部化的方式呈現。此特性讓 Wavelet 成為訊號降雜、影像壓縮、邊緣與特徵偵測，以及生醫訊號分析等領域的強大工具
- 近年來，學者嘗試將 Wavelet 與深度學習(Deep Learning)結合，透過訓練網路自動學得類 Wavelet 的濾波器，以針對特定任務最佳化特徵提取。還有將 Wavelet 與 Curvelet、Shearlet 等其他多尺度基底混合使用，以更加精準地擷取影像的方向性或具特殊結構的特徵。未來，Wavelet 在社群網路數據、多模態資料融合等新興領域，也都有潛在發展空間。