

PRESENTATION

# SVD for Image Denoising and Compression

M11407316 施雯馨





# Why Image Denoising?



- 影像很容易被 **noise** 污染

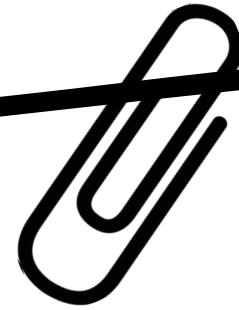
影像在「取得、儲存、傳輸」過程中都可能被雜訊污染。一旦影像有 **noise**，不只是看起來變差，裡面的重要特徵也可能被蓋掉。

- 常見 **noise**

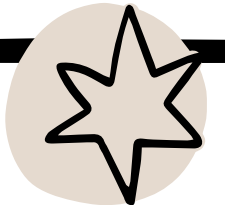
**Gaussian noise / impulse noise**：常見於數位相機

**speckle noise**：常見於 **MRI**、**Ultrasound**、**CT**、**SAR** 影像





# Overview



**1**

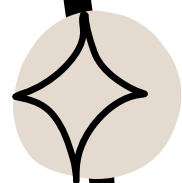
**Singular Value  
Decomposition  
(SVD)**

**2**

**Multiresolution  
SVD (MSVD)**

**3**

**Adaptive PCA  
Denoising**





# Singular Value Decomposition (SVD)

對一個影像矩陣 **A**，可以做 **SVD** 分解：

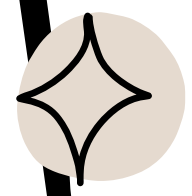
$$A = USV^T$$

左奇異向量  
(Left Singular Vectors)

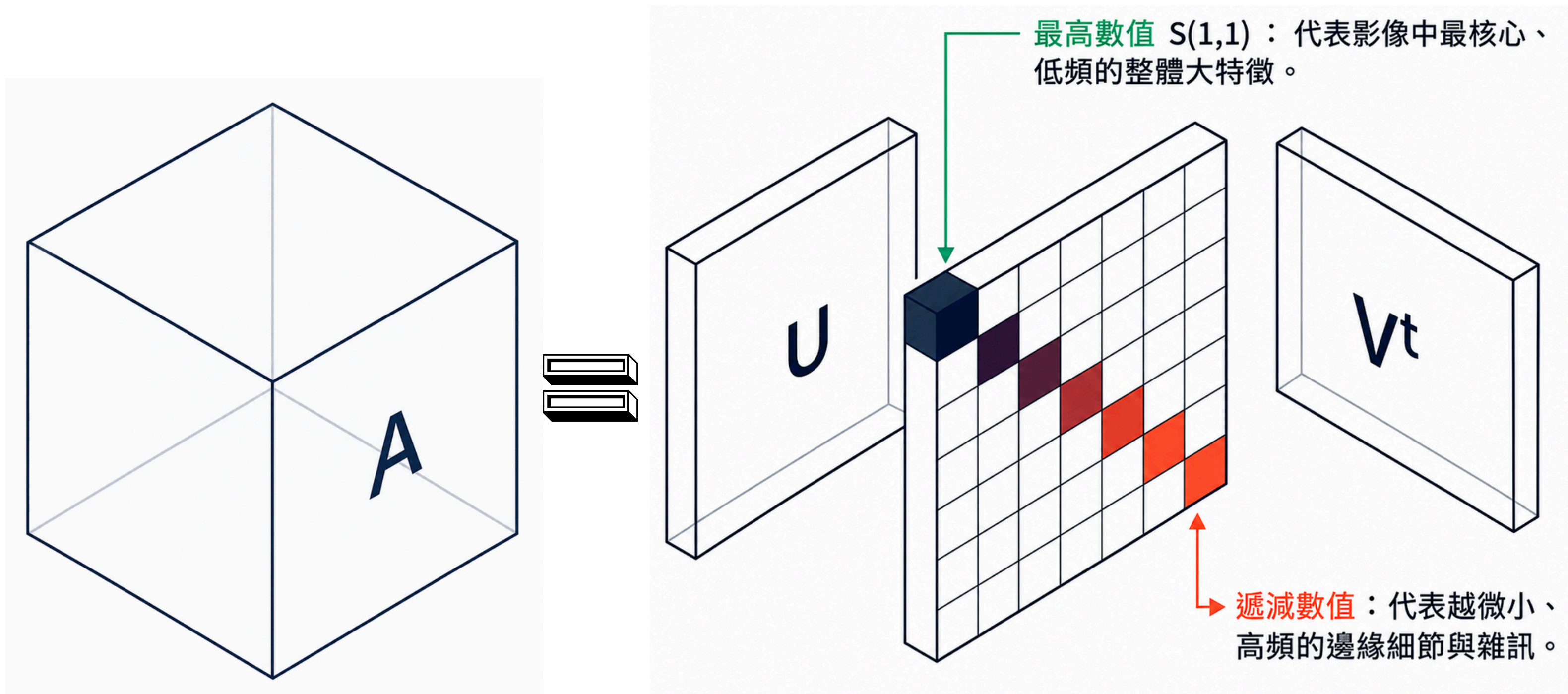
奇異值矩陣  
(Singular Values)

右奇異向量  
(Right Singular Vectors)

$$A = \lambda_1 u_1 v_1^T + \lambda_2 u_2 v_2^T + \dots + \lambda_k u_k v_k^T$$

- $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \dots$
  - $\lambda$  稱為奇異值 (Singular Value)
- 

# Why SVD Works for Images





# SVD vs MSVD



傳統 **SVD** 有一個問題：它直接對整張影像做分解

項目	SVD	MSVD
分析對象	整張影像	不同尺度的子影像
特徵擷取能力	全域特徵	全域與局部特徵
去雜訊能力	中等	較佳
邊緣細節保留	容易損失	保留較完整
適合應用	PCA、資料降維、影像壓縮	影像去雜訊、影像融合、醫學影像處理



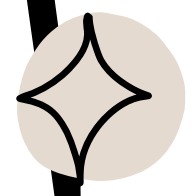


# Multiresolution SVD (MSVD)



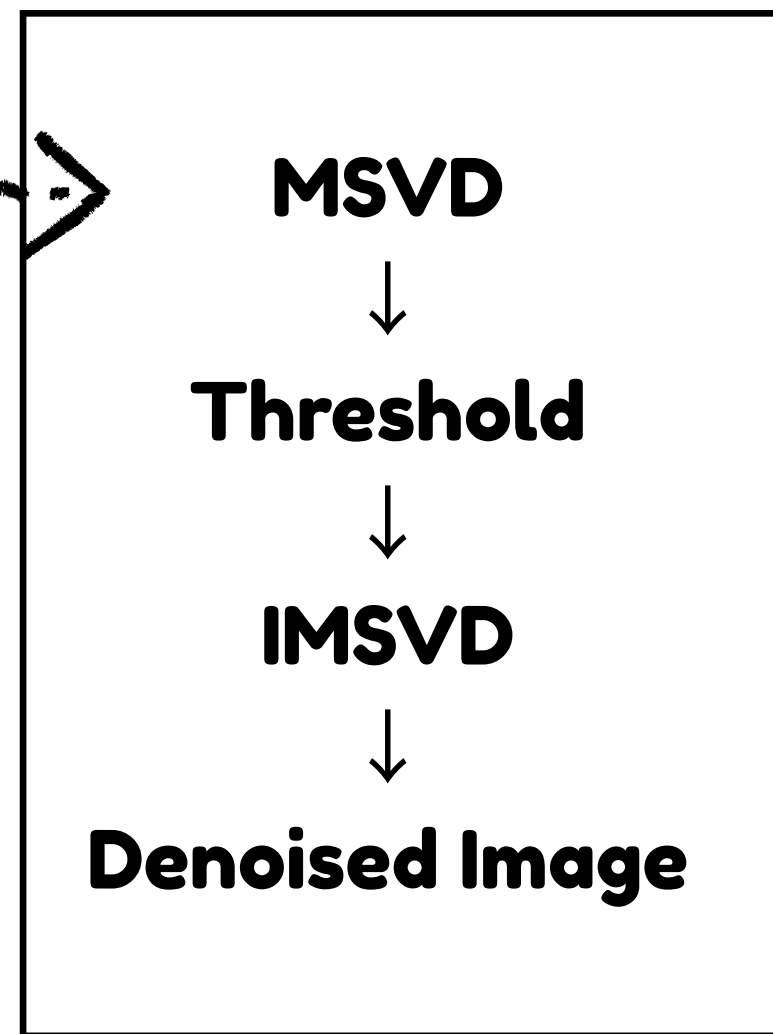
- 同一張影像，不要只用一種尺度看，而是分成「粗略資訊」和「細節資訊」來看
- **Wavelet** 會把影像分成四個 **subbands**：

Subband	意義	內容
LL	Low-Low	低頻，影像主要內容
LH	Low-High	水平/垂直方向細節
HL	High-Low	邊緣細節
HH	High-High	對角細節、高頻 noise



# MSVD Denoising Algorithm

假設原圖 **A** 是：**256 × 256**



**Step 1**：把影像 **reshape** 成 **A1**

**256 × 256** ..... **4 × 16384**

**Step 2**：對 **A1** 做 **SVD**

$$[U, S] = SVD(A_1)$$

**2x2 block**

**[a b]**  
**[c d]**

**vector**

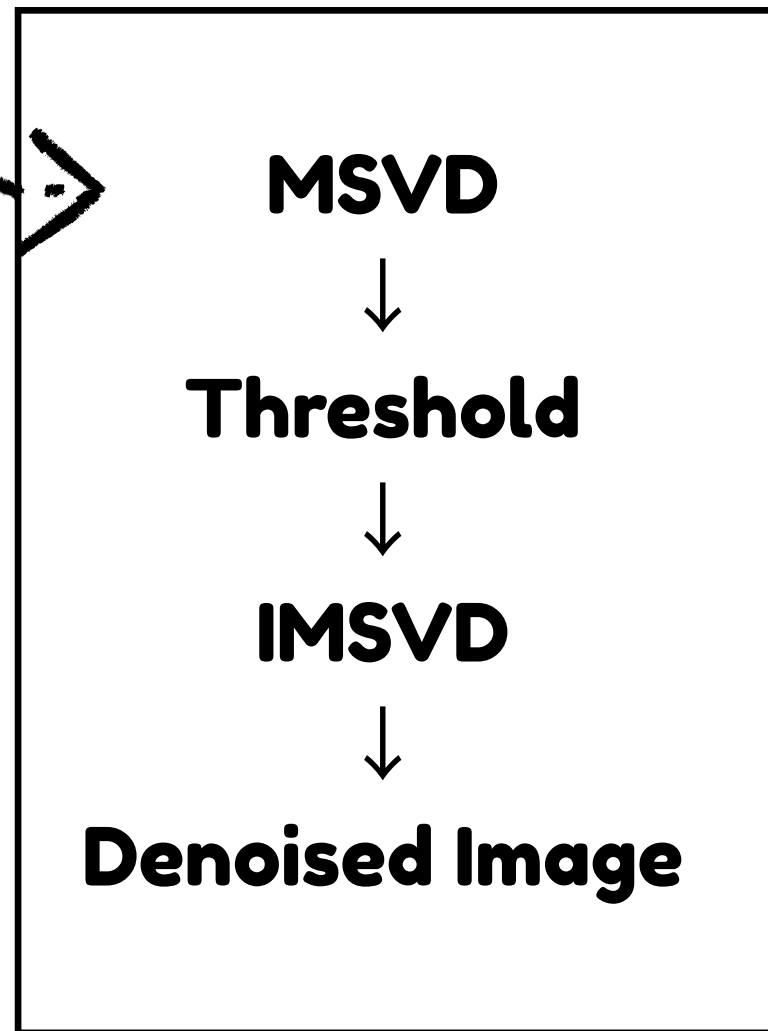
**[a**  
**b**  
**c**  
**d]**



# MSVD Denoising Algorithm

Step 3 : 計算  $T$       $T = U^T A_1$

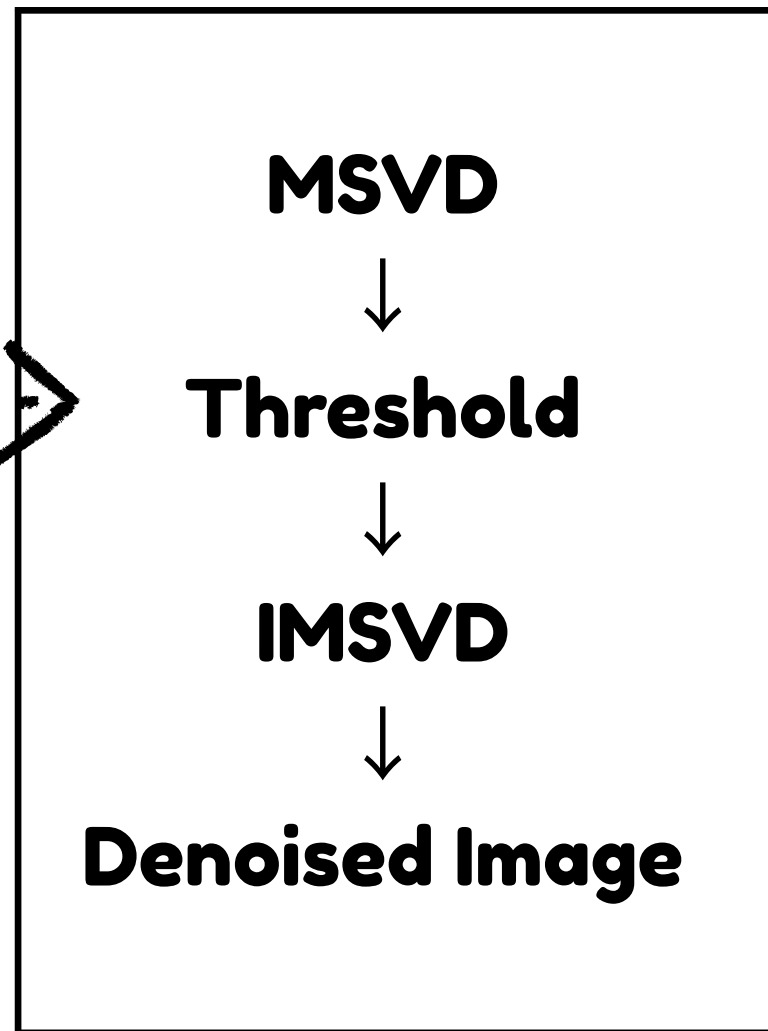
Step 4 : 把  $T$  的四列 **reshape** 回影像



T(1,:)   
 T(2,:)   
 T(3,:)   
 T(4,:)

MSVD subband	意義	類似 Wavelet
Y.LL	低頻、主要內容	LL
Y.LH	高頻細節	LH
Y.HL	高頻細節	HL
Y.HH	高頻細節	HH

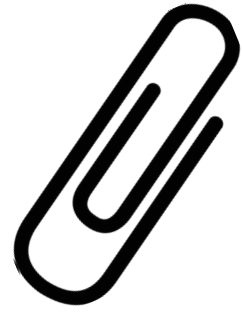
# MSVD Denoising Algorithm



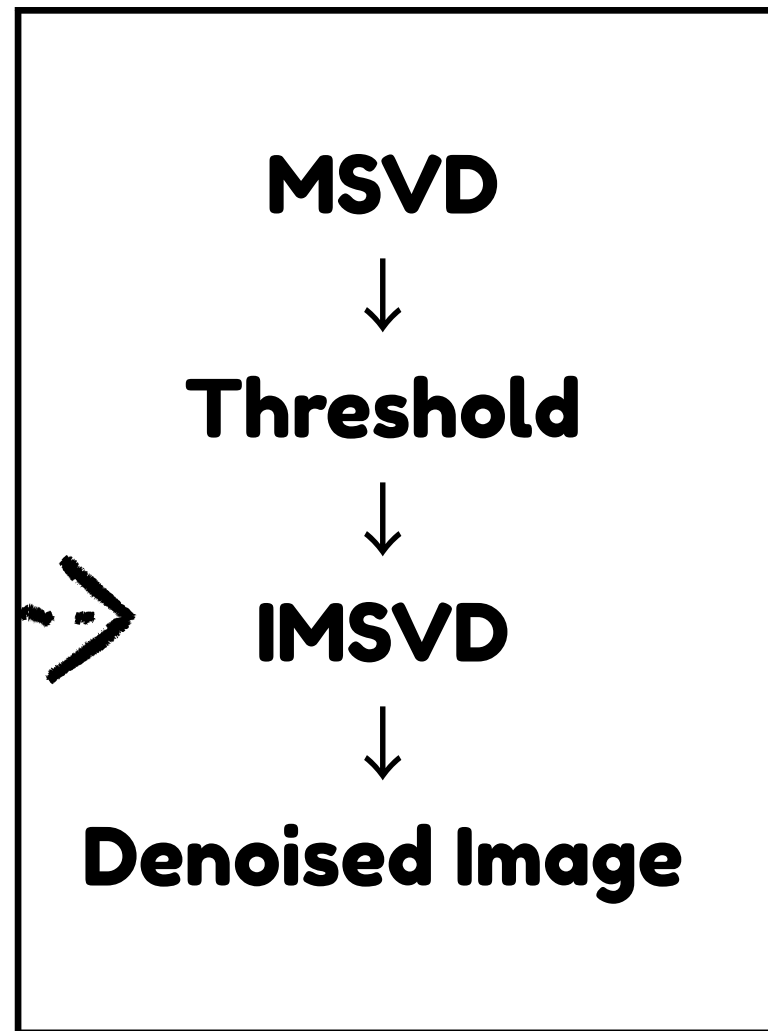
假設門檻是  $T$ ，如果某個係數很小：就認為它比較可能是 **noise**

- **Hard Thresholding**
- **Soft Thresholding**
- **Adaptive Thresholding**

**Threshold on**  
 $T(2,:), T(3,:), T(4,:)$



# MSVD Denoising Algorithm



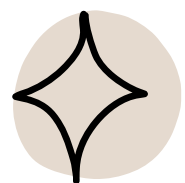
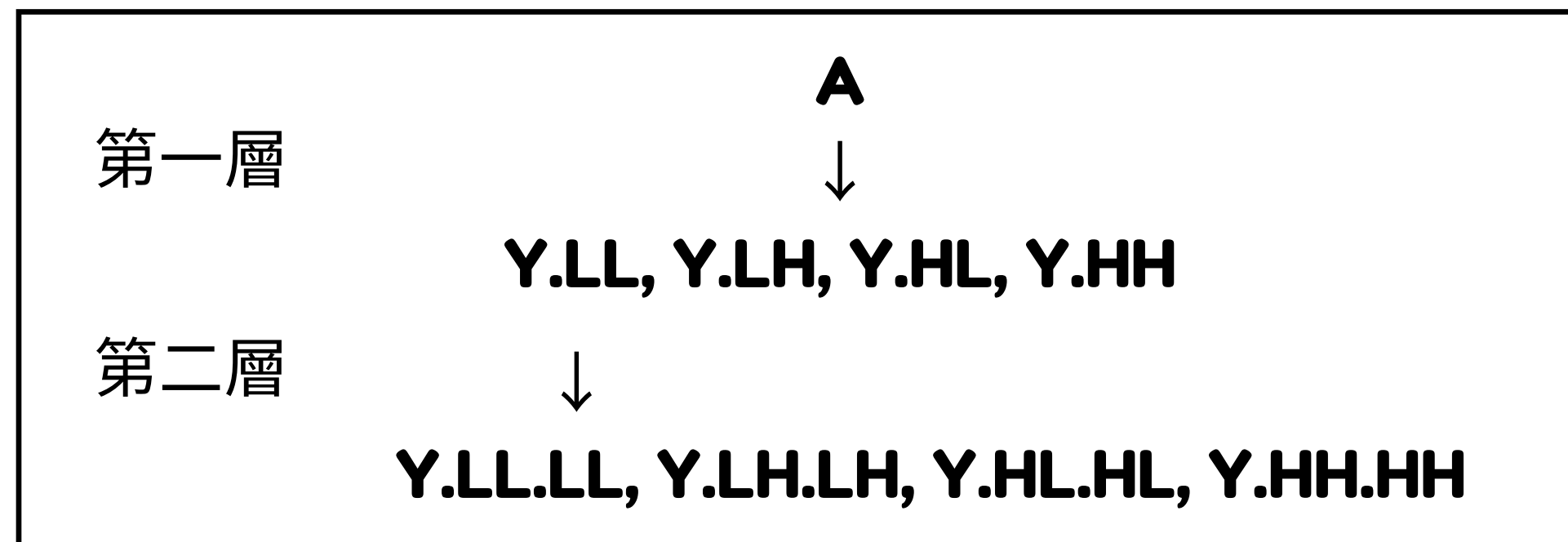
- **MSVD = Inverse MSVD**

把四個 **subbands** 還原回原圖

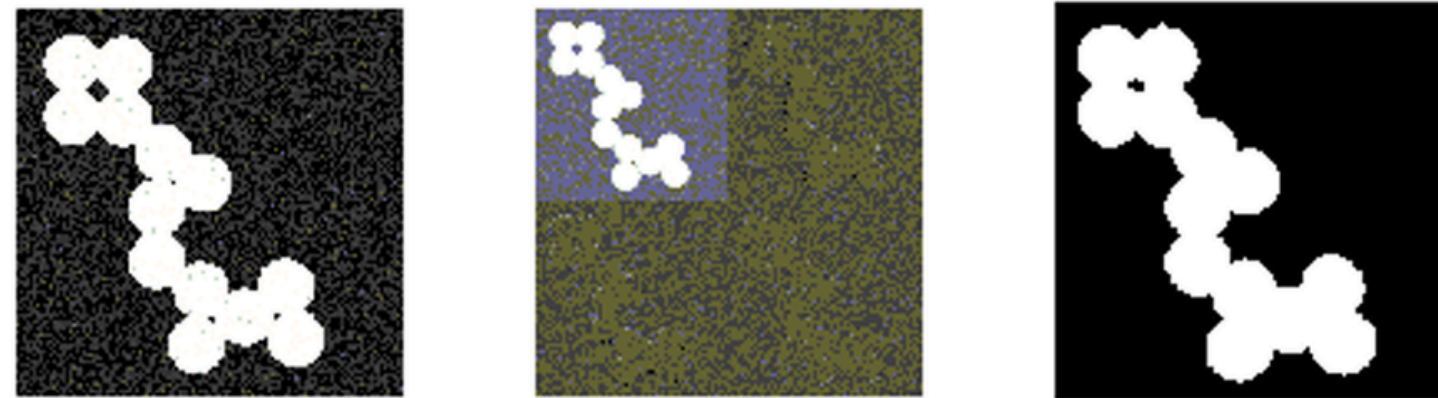
- 為什麼叫 **multiresolution** ?

因為分解後的四張 **subbands** 尺寸都變小了：

原圖：**256x256**      子頻帶：**128x128**



# MSVD Results

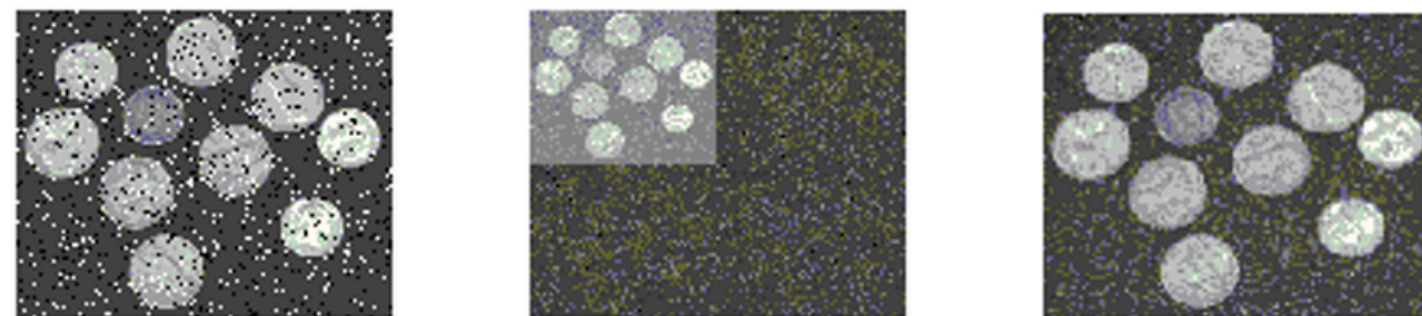


(a) Noisy

(b) I level decomposition

(c) Denoised

Fig. 2. Denoising of Gaussian noise from "circle" image

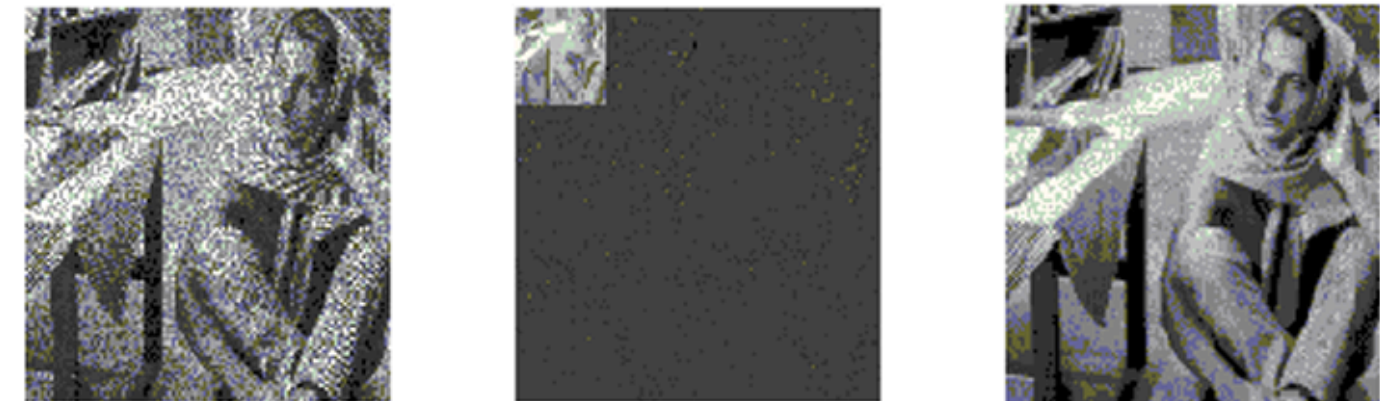


(a) Noisy

(b) I Level decomposition

(c) Denoised

Fig 3. Denoising of impulse (salt & pepper) noise from "coin" image

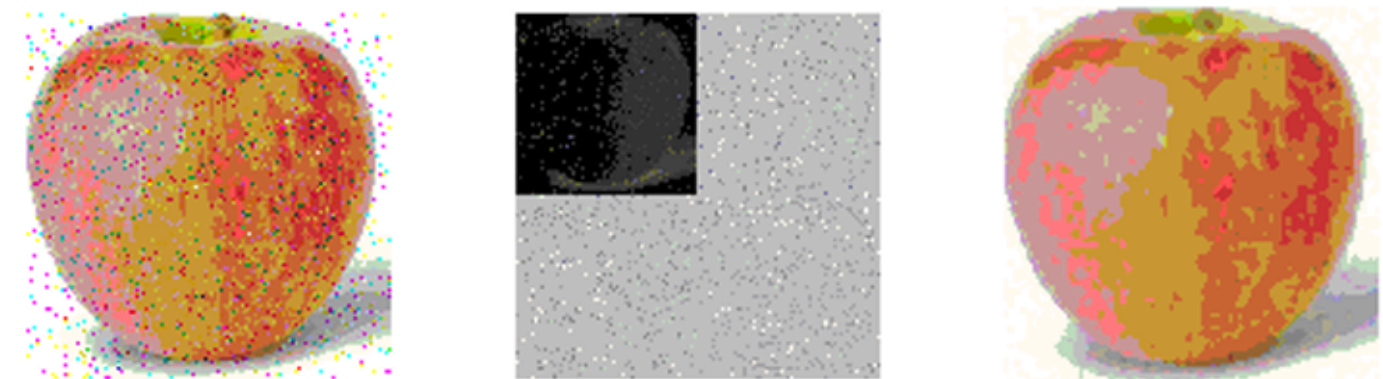


(a) Noisy

(b) II level decomposition

(c) Denoised

Fig 4. Denoising of speckle noise from "Barbara" image



(a) Noisy

(b) I level denoising

(c) Denoised

Fig 5. Denoising of color image (impulse) from "apple3" image

# MSVD Results

Table1. PSNR values in dB

Noise	Gaussian (10%)		Impulse (10%)		Speckle	
	WT	MSVD	WT	MSVD	WT	MSVD
Image						
Circle	35.21	34.72	34.56	34.67	32.26	33.43
Coin	32.78	32.89	33.23	34.01	30.23	30.34
Barbara	36.43	37.12	36.12	36.87	36.21	35.89
Colour	30.21	29.89	29.87	30.21	30.23	30.54

Table2. Correlation Coefficient (CC) values

Noise	Gaussian (10%)		Impulse (10%)		Speckle	
	WT	MSVD	WT	MSVD	WT	MSVD
Image						
Circle	0.6823	0.6612	0.6712	0.6832	0.6251	0.6325
Coin	0.8976	0.9210	0.9490	0.9320	0.8841	0.9144
Barbara	0.6810	0.6923	0.5832	0.7125	0.7012	0.7851

Table3. Structural Similarity Index (SSIM) values

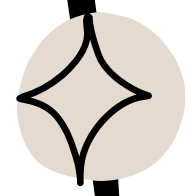
Noise	Gaussian (10%)		Impulse (10%)		Speckle	
	WT	MSVD	WT	MSVD	WT	MSVD
Image						
Circle	0.8504	0.8231	0.6325	0.8165	0.8507	0.8351
Coin	0.6150	0.6354	0.6010	0.6325	0.7367	0.6250
Barbara	0.6530	0.7321	0.6215	0.7356	0.7254	0.7213
Colour	0.7810	0.7921	0.7625	0.7952	0.8211	0.8423



# Why Adaptive PCA?



MSVD	Adaptive PCA
固定基底	自動學習基底
全圖同一規則	每個區域不同規則
Threshold	LMMSE
保留細節有限	保留紋理能力強





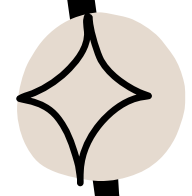
# Adaptive PCA Denoising



- 很多去雜訊方法都用 **wavelet thresholding**，就是把影像轉到某組 **basis** 上，通常高頻係數比較像雜訊，所以把小的高頻係數設成 **0**，就能去掉雜訊。
- 邊緣也是高頻，所以如果只把高頻當雜訊濾掉，影像邊緣也會被一起模糊掉。
- 不用固定的 **wavelet basis**，而是根據影像局部區域，自動產生 **2-D locally adaptive basis**，從而保留邊緣的紋理。

影像雜訊模型

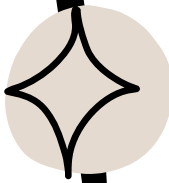
$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{n},$$





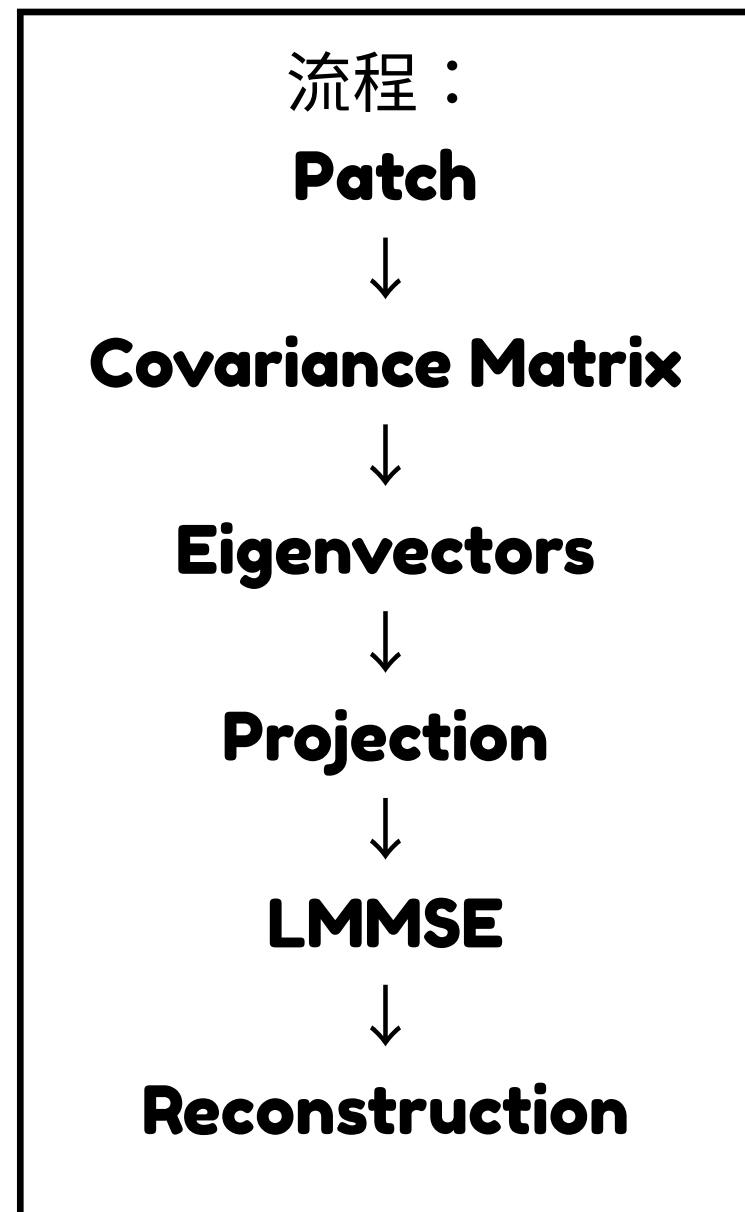
# Adaptive PCA Denoising



- 在條紋區域
    - 建立條紋方向的 **PCA basis**
  - 在邊緣區域
    - 建立邊緣方向的 **PCA basis**
  - 在平坦區域
    - 建立平坦區域的 **PCA basis**
- 



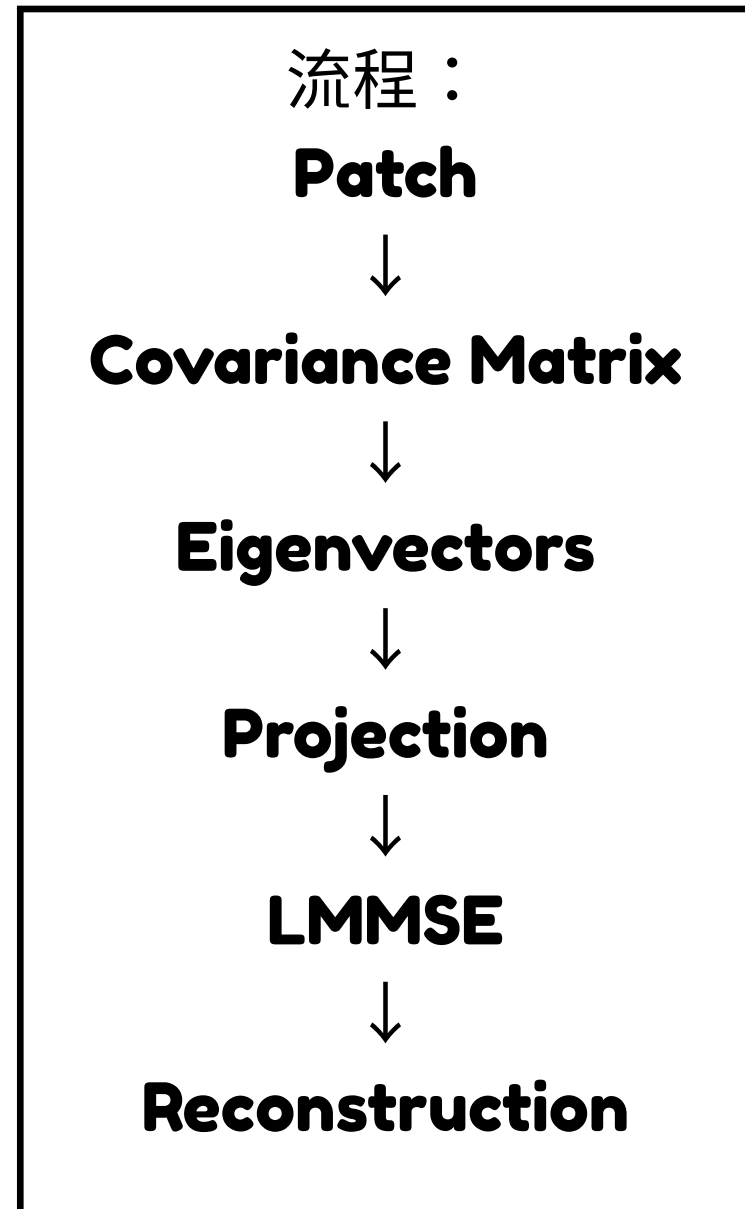
# PCA Denoising Framework



找到哪些成分是真正的影像，哪些成分比較像雜訊。



# Estimate noise variance $\sigma$

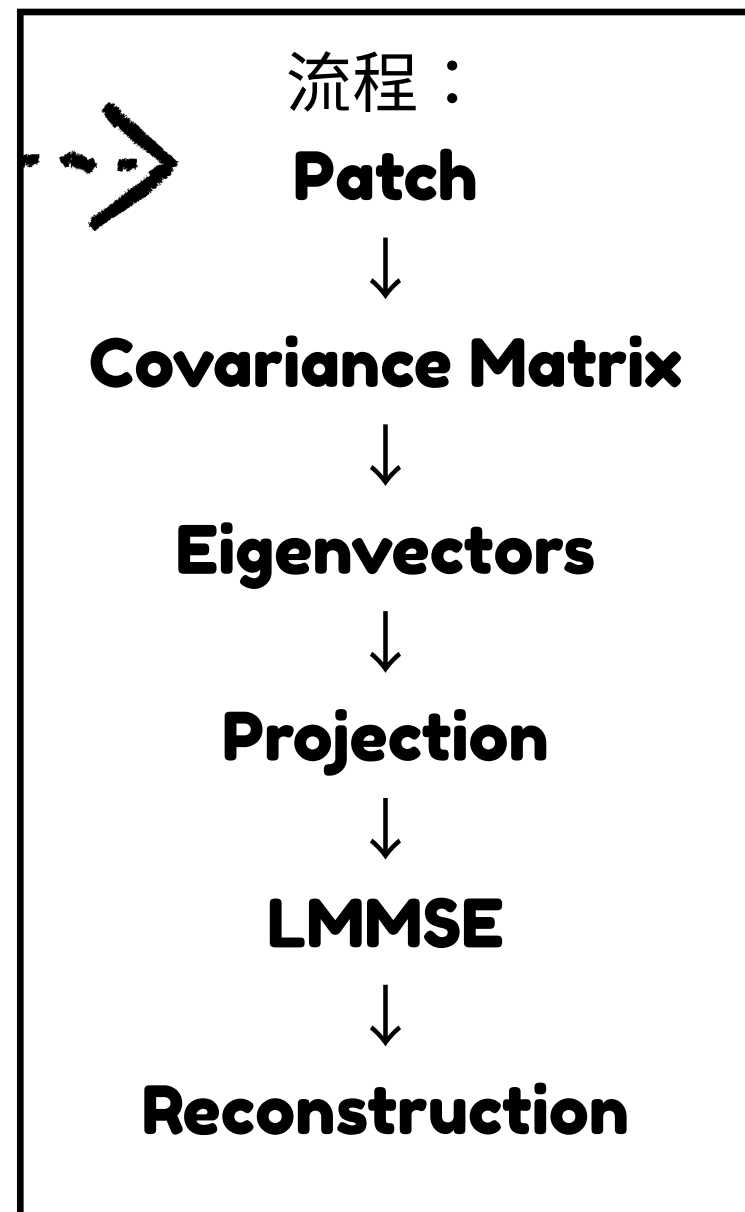


- 作者用 **wavelet high-high band** 的 **median** 來估 **noise variance**：

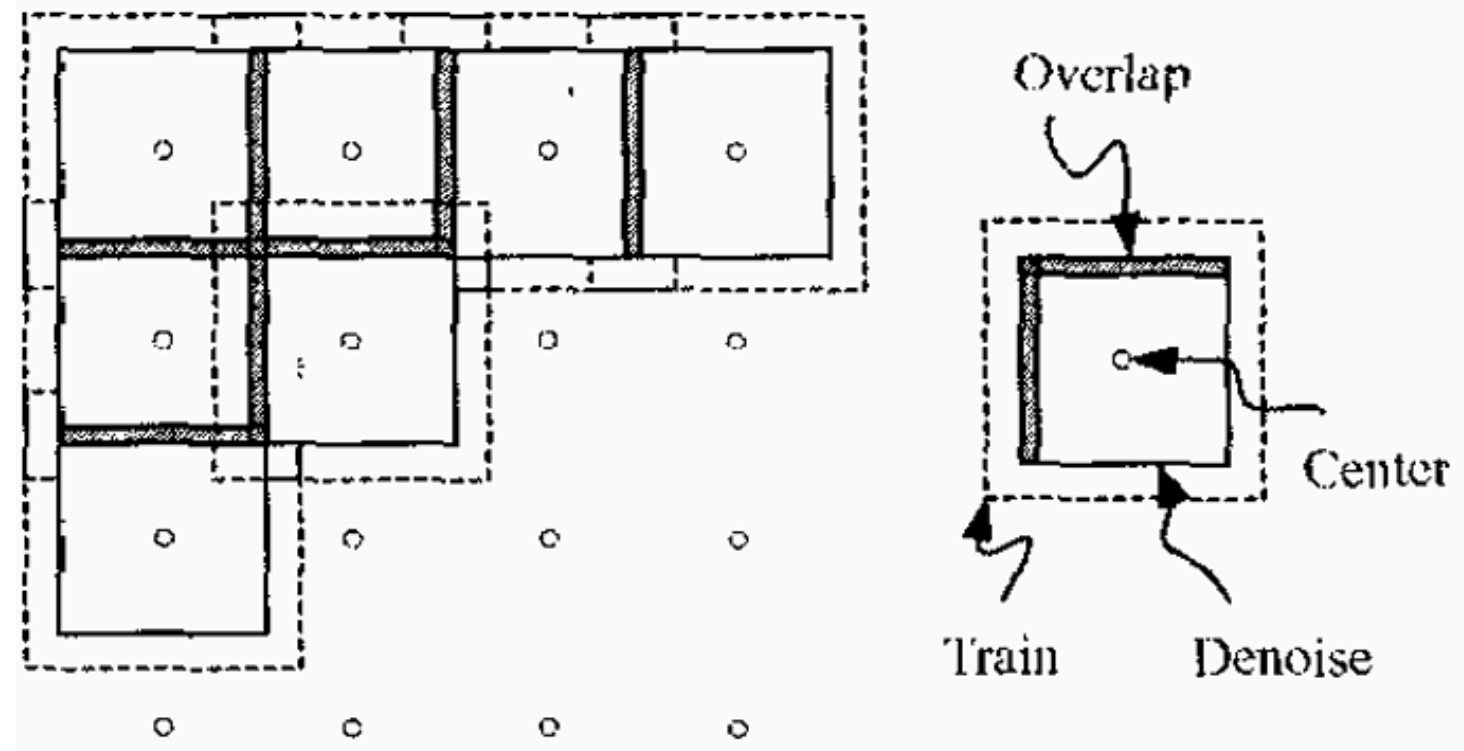
$$\hat{\sigma} = \frac{\text{Median}(HH)}{0.6745}$$

- **HH band** 通常包含很多高頻雜訊，所以常被拿來估 **noise strength**

# Use local patches to build PCA basis



- 不直接對整張圖做 **PCA**，而是把影像切成很多 **local patches**
- 每個 **patch** 附近會收集很多小區塊，形成 **training set S**
- 然後對 **S** 做 **PCA**，得到這個區域的 **principal components**





# 建立 covariance matrix



流程：

**Patch**



**Covariance Matrix**



**Eigenvectors**



**Projection**



**LMMSE**

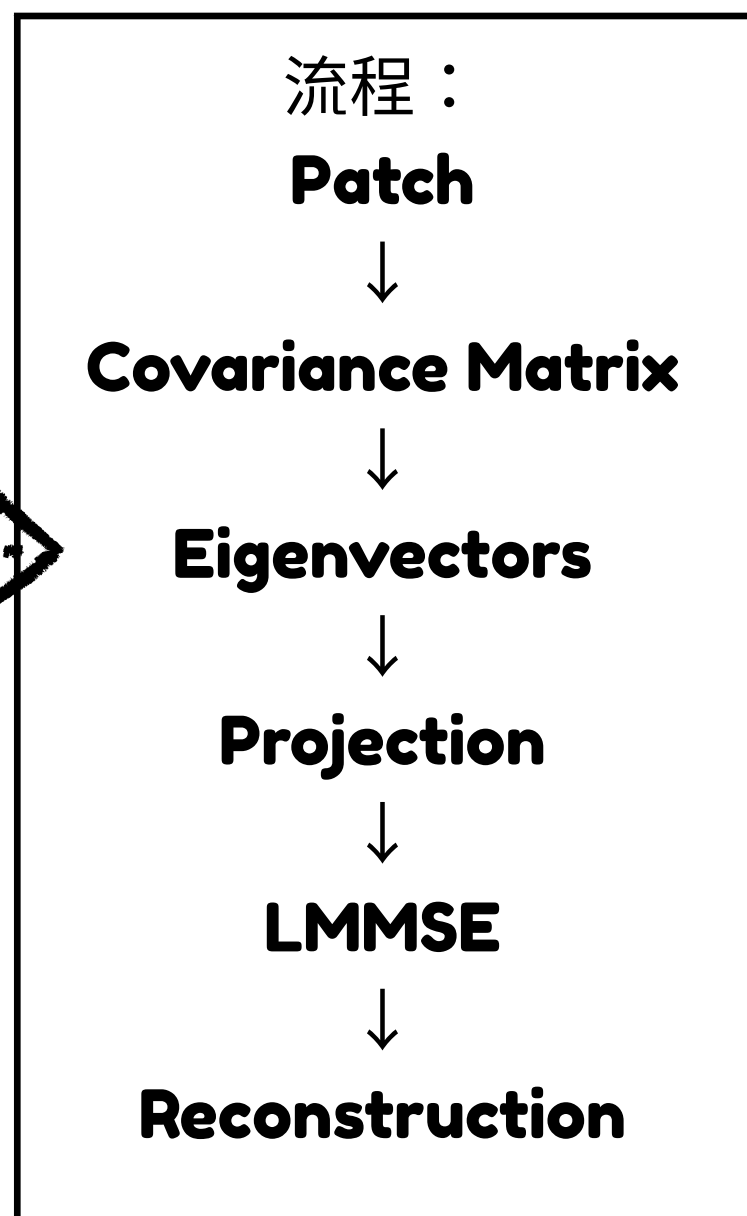


**Reconstruction**

- 算資料的共變異程度
  - 如果某個方向變化很大，代表：這方向很重要
  - 如果某個方向變化很小，代表：可能只是 **noise**

$$Q = (SS^T)^{-1}$$


# 找 eigenvectors



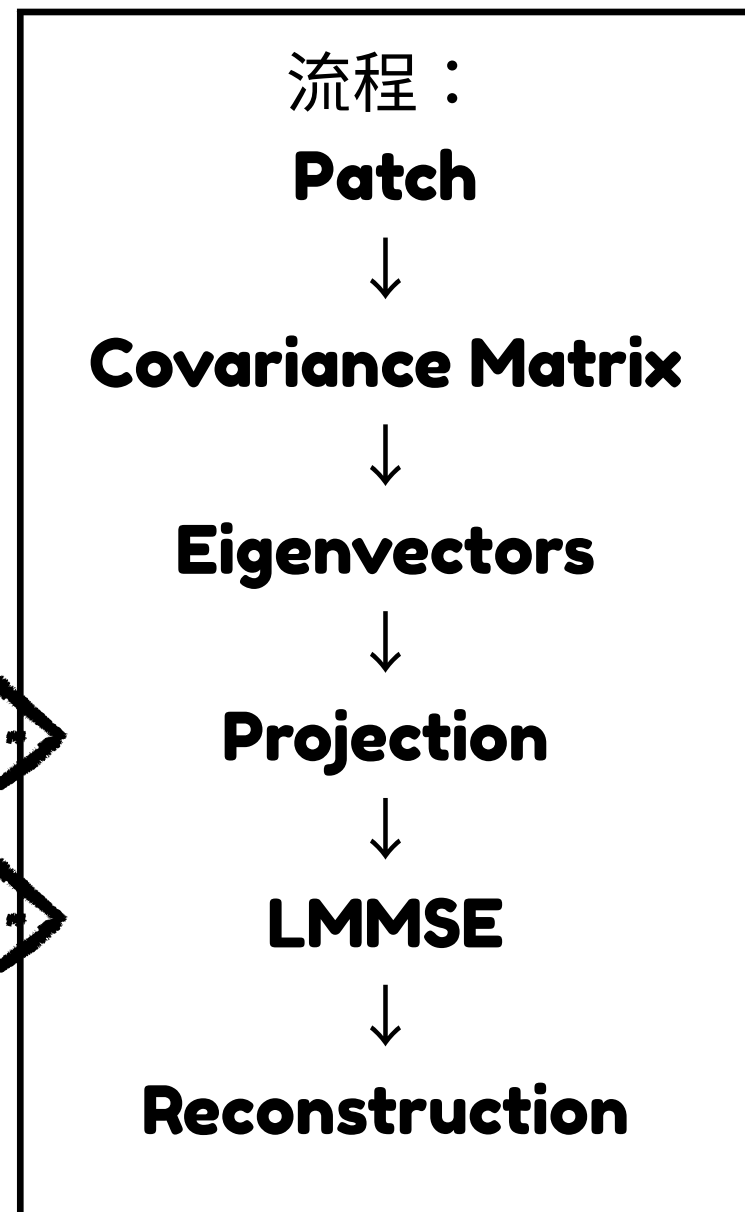
- 每個 **eigenvector**：就是一個 **principal component**

$$Qv = \lambda v \dots \dots \dots \rightarrow v_1, v_2, v_3, \dots$$

- 例如：條紋區域 **PCA** 可能長這樣



# Projection & LMMSE



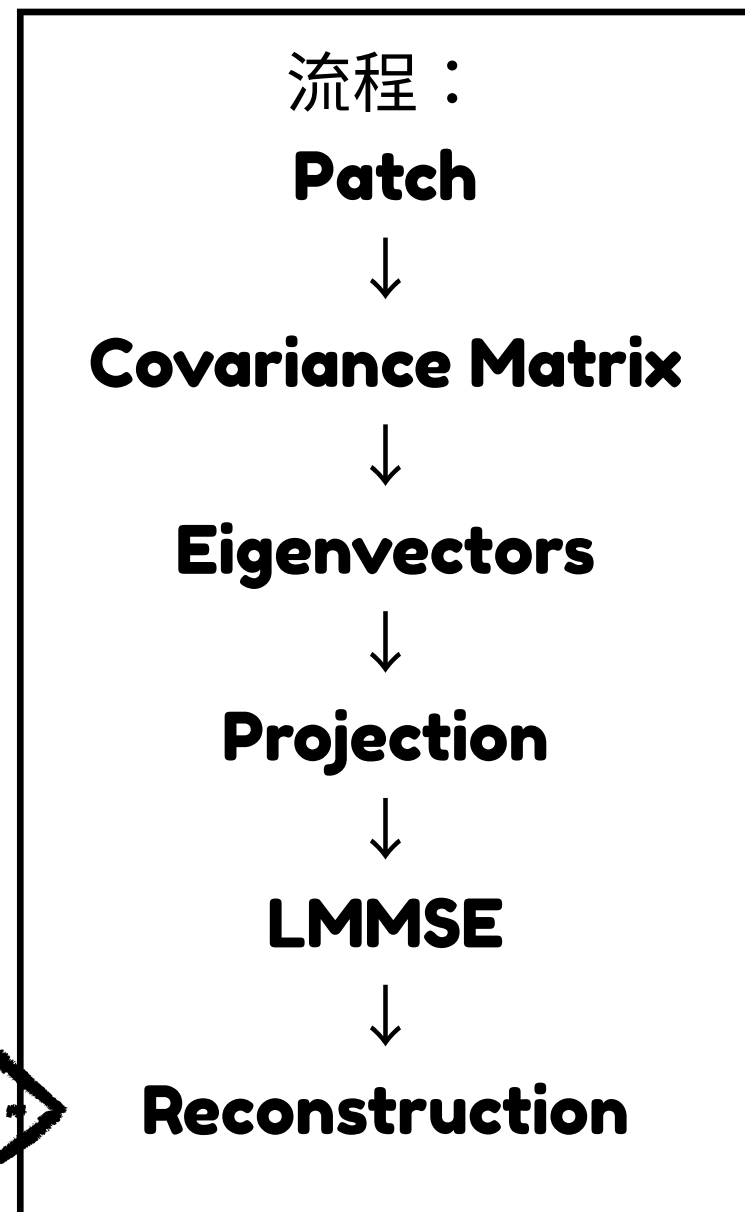
- 先把 **noisy patch** 投影到 **PCA basis** 上，得到 **PC coefficients**
  - 例如：**[12.3,5.8,1.2,0.3,0.1]**
- 估計 **PCA coefficient variance**

$$\hat{\sigma}_i^2 = \max \left[ 0, \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M y_i^2 - \sigma^2 \right]$$

- 用 **LMMSE** 修正 **PC coefficients**，重建 **denoised patch**

$$\hat{x}_i = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \sigma^2} y_i$$

# PCA Denoising Framework



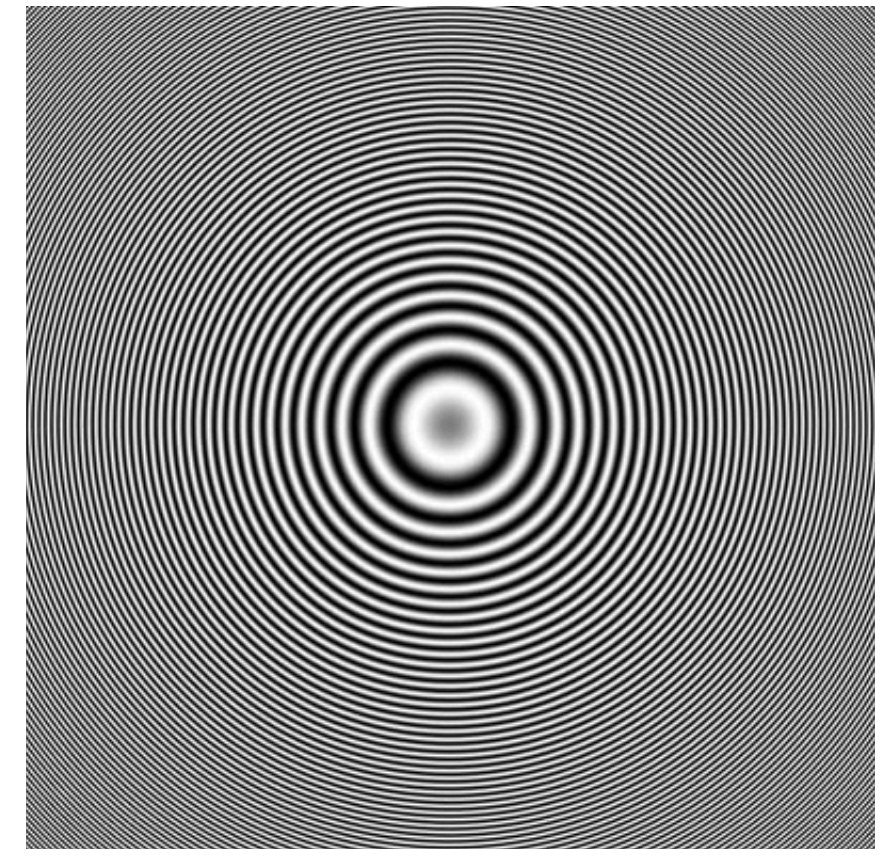
- 所有 **coefficient** 去雜訊後再投影回原空間

$$\hat{x} = \sum_i \hat{y}_i v_i$$

# Image Quality Metrics : PSNR

- **PSNR** 越高代表：去雜訊效果越好，與原圖越接近

$$PSNR = 20 \log_{10} \left( \frac{255}{RMSE} \right)$$



測試的 4 張影像

# Experimental Results

Gaussian noise of variance = 50

Image	Noisy	HMM	Sp. A.	SI-AShr	PC
Lena	14.13	26.07	27.23	27.96	<b>28.00</b>
Boat	14.15	24.70	25.74	26.29	<b>26.36</b>
Barb	14.16	23.29	25.03	24.72	<b>26.21</b>
Ring	14.15	17.58	23.28	22.97	<b>27.18</b>

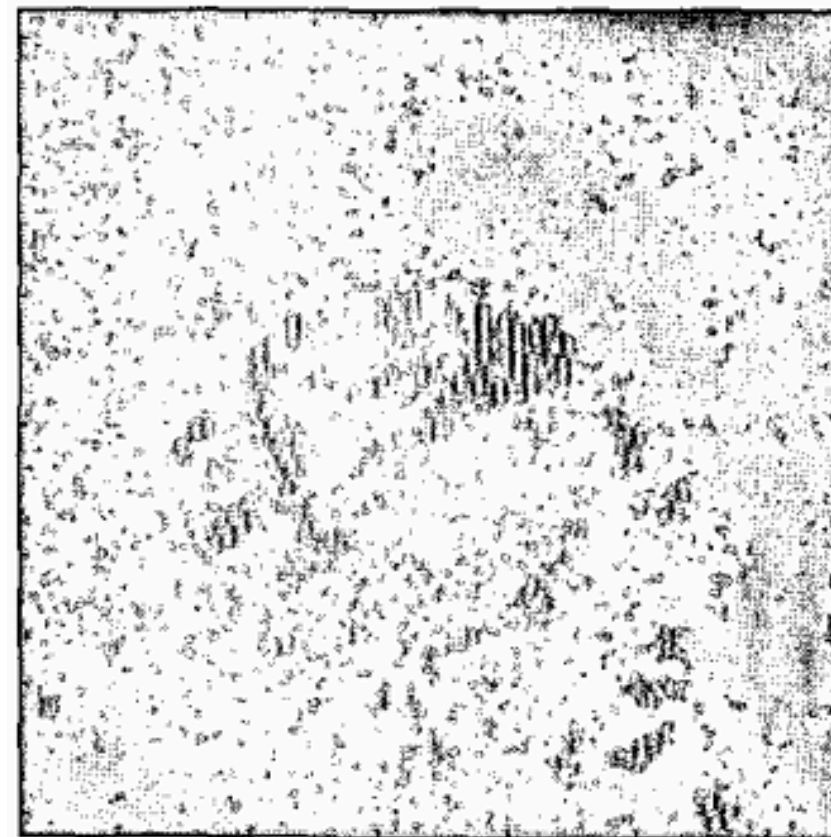
Gaussian noise of variance = 25

Image	Noisy	HMM	Sp. A.	SI-AShr	PC
Lena	20.16	29.22	30.64	31.05	<b>31.26</b>
Boat	20.16	28.01	28.99	29.42	<b>29.62</b>
Barb	20.20	26.75	28.67	28.58	<b>29.91</b>
Ring	20.17	22.10	27.66	27.54	<b>32.82</b>

Gaussian noise of variance = 15

Image	Noisy	HMM	Sp. A.	SI-AShr	PC
Lena	24.60	31.66	33.05	33.31	<b>33.60</b>
Boat	24.59	30.68	31.65	32.01	<b>32.25</b>
Barb	24.63	29.39	31.49	31.56	<b>32.63</b>
Ring	24.61	25.80	30.97	31.07	<b>36.32</b>

**SI-AdaptShrink**



**adaptive PC**



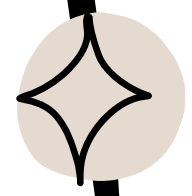
Fig. 2. Barbara's knee ( $\sigma = 50$ ): SI-AdaptShrink (top) and adaptive PC (bottom). Notice how much better the stripes are preserved using adaptive PC.



# Comparison & Discussion




方法	SVD	MSVD	Adaptive PCA
全域分析	✓	✓	✓
多尺度分析	✗	✓	✗
局部自適應	✗	✗	✓
去雜訊效果	普通	良好	最佳
計算量	低	中	高





# Conclusion



- 1 SVD 利用奇異值集中能量特性進行壓縮與去雜訊**
  - 2 MSVD 結合多解析度分析，可有效處理不同頻率資訊**
  - 3 Adaptive PCA 根據局部結構建立最佳基底，進一步提升細節保留能力**
  - 4 從 SVD → MSVD → Adaptive PCA，可以看出去雜訊技術逐漸朝向更自適應、更符合影像結構的方向發展**
- 



## 參考文獻



1

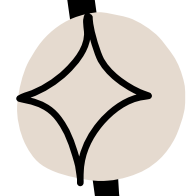
***Abdi, H. (2007). Singular value decomposition (SVD) and generalized singular value decomposition. Encyclopedia of measurement and statistics, 907(912), 44.***

2

***Malini, S., & Moni, R. S. (2015). Image denoising using multiresolution singular value decomposition transform. Procedia Computer Science, 46, 1708-1715.***

3

***Muresan, D. D., & Parks, T. W. (2003, September). Adaptive principal components and image denoising. In Proceedings 2003 International Conference on Image Processing (Cat. No. 03CH37429) (Vol. 1, pp. 1-101). IEEE.***



THANK YOU

